

Записки към упражненията по Числени методи
сп. Информатика

ас. Здравка Иванова
гл. ас. д-р Тихомир Иванов



Записките са развити в съответствие със съдържанието на упражненията
по Числени методи към курса на доц. д-р Лозко Милев

Съдържание

1	Интерполационна задача на Лагранж	5
1.1	Интерполационна формула на Лагранж	8
1.2	Теорема за оценка на грешката за интерполационната задача на Лагранж	15
2	Полиноми на Чебишов	21
3	Разделени разлики. Интерполационна формула на Нютон	29
4	Крайни разлики	37
5	Интерполационна задача на Ермит. Разделени разлики с кратни възли	45
6	Системи на Чебишов. Интерполиране с тригонометрични полиноми	52
6.1	Системи на Чебишов	52
6.2	Интерполиране с тригонометрични полиноми	58
7	Сплайн-функции. Интерполиране с кубични сплайни	63
7.1	Сплайн-функции	63
7.2	Интерполиране с кубични сплайни	70
8	В-сплайни	75

Увод

В курсовете по математика досега сме разгледали различни задачи и начини за тяхното решаване, например решаване на уравнения и системи алгебрични уравнения, решаване на диференциални уравнения, пресмятане на производни и интеграли, търсене на максимуми и минимуми на функции и др. Винаги досега целта ни е била да се намери „аналитичен“ подход, който да ни води до точното решение на задачата – числото, което превръща алгебричното уравнение във вярно числово равенство; функцията, която превръща диференциалното уравнение в твърдение и т.н. Разгледали сме различни начини за решаване на всяка от споменатите задачи. За съжаление обаче тези начини ни позволяват да решаваме много ограничен клас от задачи. Например можем да пресмятаме таблични интеграли, интеграли от рационални функции и още няколко класа интеграли, но останалите не могат да бъдат решени точно. Можем да решаваме линейни ОДУ, уравнения с разделящи се променливи и още няколко класа уравнения, но останалите не могат да се решат с познатите аналитични техники. Последното е в сила на практика за всеки клас математически задачи, с които бихме се сблъскали.

От друга страна, в практиката рядко имаме късмета да срещнем точно задача, за която стандартните аналитични техники вършат работа. Нека направим малко отклонение и да коментираме защо по принцип в практиката се налага решаването на математически задачи и така ще се уверим, че едва ли те ще попаднат в тези класове, за които аналитичните техники са използвани. Математиката е езикът, на който се описват процесите от света около нас. За да изучим даден реален процес или да решим дадена практическа задача, ние трябва да определим кои са основните характеристики, които ги описват – това са някакви величини, които дават информация за съответния процес (например време, скорост, температура, сила, бързодействие на алгоритъм, компресия на данни и др.). Величините се измерват в дадени мерни единици, т.е. им се съпоставят някакви числени стойности. Изучавайки даден процес, ние искаме да изучим зависимостите между величините, които го описват. На езика на математиката зависимостта между две и повече величини се нарича функция. С други думи ние описваме зависимостите около нас посредством функции. Често тези функции не могат да бъдат зададени явно. За тях е известно само какви закономерности удовлетворяват. Тоест се задават като решенията на диференциални уравнения. Ясно е, че работата с функции и тяхното изследване (съответно изучаването на съответните реални процеси) е пряко свързано с необходимостта от пресмятането на производни (основна характеристика на функцията/съответния процес – скоростта ѝ на изменение в дадената точка) и интеграли. Налагането на условия, които искаме да са удовлетворени, се описва математически посредством уравнения и т.н.

И така, няма причина да смятаме (и реалността показва, че случаят не е такъв!), че ако описваме един произволен реален процес, то математическите задачи, които възникват, ще са от този ограничен набор случаи, за които аналитичните техники дават резултат. Но всъщност точно тези – реалните задачи, ние имаме нужда да решим. Оказва се обаче, че, независимо че не можем да ги решим точно, **в много случаи можем да ги решим поне приближено (да намерим апроксимация) с достатъчно висока за нашите цели точност.** Настоящият курс ще е именно посветен на въпроса за приближеното решаване на редица класове математически задачи. Нещо



повече, ще разглеждаме **техники, които ни позволяват да намираме приближения само с помощта на тези операции, които компютърът може да извършва – аритметичните операции**. Такива техники носят събирателното наименование **числени методи**.

В настоящия курс ние ще се занимаем с въпроса за приближаването на:

- функции – функцията е фундаменталният обект, който описва зависимостите между величините от заобикалящия ни свят, затова е съвсем естествено да отделим сериозно внимание на работата с тях. Необходимостта от приближаването дори на функции, които приемаме за съвсем естествени, става съвсем очевидна, ако се опитаме да пресметнем например $\sin 0.23$. Веднага можем да се уверим, че всъщност дори „най-простите“ функции не са толкова прости и е добре да можем да ги приближим с „още по-прости“;
- производни и интеграли – след като можем да приближаваме функции, ще се научим приближено да извършваме и основните операции с тях;
- решаване на нелинейни алгебрични уравнения – макар да решаваме такива още от училище, лесно можем да се уверим, че дори едно полиномиално уравнение

$$x^5 - 4x^3 + 2x^2 + x - \sqrt{2} = 0$$

не може да бъде решено, какво остава за по-сложни уравнения.

Нека все пак споменем, за да не остане читателят с погрешно впечатление, че аналитичните методи са също много важни! От една страна, те ни позволяват да извеждаме, както ще видим, числени алгоритми. От друга страна, те позволяват да се получат точни резултати за някои прости случаи, които дават обща (качествена) информация за разглеждания процес, а могат да служат и като база за сравнение (англ., *benchmark*), по която да се оценяват числените методи.



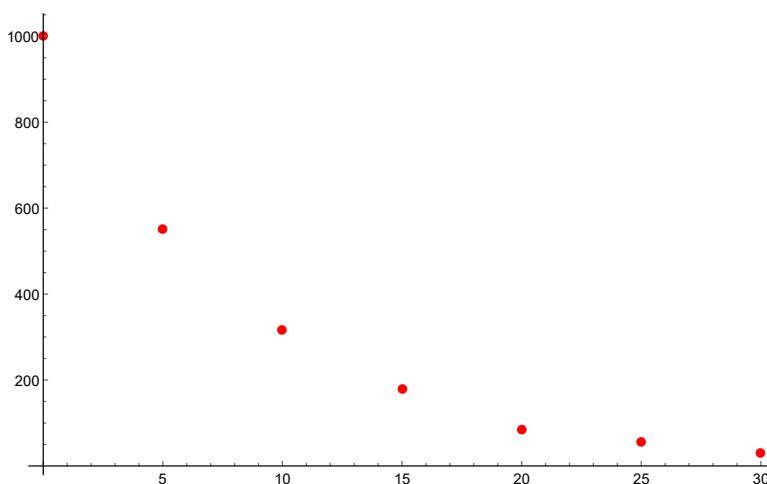
Глава 1

Интерполационна задача на Лагранж

Вече казахме, че когато искаме да опишем даден процес, то ние трябва да намерим някаква връзка между величините, които го характеризират (температура, налягане, време, скорост и т.н.). Това става на база на някакви направени експерименти, които ни позволяват да извлечем информация за този процес и величините, от които се интересуваме. Естествено е на езика на математиката връзката между направените измервания да я търсим под формата на някаква функция, да съставим уравнение, система уравнения и т.н. Да разгледаме два прости примера.

Пример 1. Дадени са измервания за количество лекарство в организма на човек, намаляващо с времето:

часове след приемане	0	5	10	15	20	25	30
кол. лекарство (mg)	1000	550	316	180	85	56	31



Да се намери функция, която описва количеството лекарство в организма на човека. Използвайте я, за да определите количеството лекарство в организма след 13 часа.

Пример 2. Да се намери приближено стойността на $\cos x$ в 0.739, като се използва таблицата с точни стойности:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0

Приближението да се направи, като се намери по-проста функция, която приема същите стойности като тези в таблицата.



В общия случай разглеждаме задачата за намиране на функция, чиято графика минава през дадени точки и чиято стойност в тези точки може (лесно) да бъде пресметната. Ще казваме, че намерената функция **интерполира** съответните данни. Задачата за намиране на такава функция ще наричаме **интерполационна задача**.

Забележка: Ако дадените точки са стойности на дадена функция, то функцията, чиято графика минава през същите точки, ще бъде приближена на дадената.

И така, следва да си зададем следните въпроси:

- как да намерим „достатъчно хубава“ функция, която да минава през дадените точки?
- можем ли да оценим приближението, т.е. да определим точността на апроксимацията, която сме направили?

Най-естествените функции, към които можем да се обърнем, са алгебричните полиноми. Както знаем, те са много удобни, защото с тях можем лесно да извършваме алгебрични действия – събиране, изваждане, умножение, деление, пресмятане на полинома в дадена точка и др. Оттук нататък пространството от алгебрични полиноми от степен, ненадминаваща n , ще означаваме с π_n . Например пространството от алгебрични полиноми от степен ≤ 2 ще означаваме с π_2 . Последното пространство включва полиномите от нулева, първа и втора степен. И така, сега ще се спрем на общата постановка на задачата за намиране на алгебричен полином, чиято графика минава през дадени точки.

Постановка на задачата на Лагранж

Нека са дадени **различни** точки (възми) x_0, x_1, \dots, x_n и съответни стойности y_0, y_1, \dots, y_n . Търсим полином $p(x) \in \pi_n$ (т.е. от степен $\leq n$), който удовлетворява интерполационните условия

$$\begin{aligned} p(x_0) &= y_0, \\ p(x_1) &= y_1, \\ &\vdots \\ p(x_n) &= y_n \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad p(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}. \quad (1.1)$$

Преди да се опитаме да намерим явния вид на този полином, нека се спрем на въпроса за съществуването и единствеността му. Когато решаваме една задача, е важно да знаем дали тя има и то единствено решение. Например ако е даден някакъв алгоритъм, ние искаме след като го реализираме да знаем, че сме получили коректно решение и то е решението, което търсим. В курса по Числени методи често ще се спираме на този въпрос.

Ясно е, че полиномът, който търсим, има вида

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Един начин да го определим е просто да решим получената система

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n = y_1, \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n = y_n. \end{cases}$$



Да я запишем във векторно-матрична форма:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

От линейната алгебра знаем, че системата има единствено решение $\Leftrightarrow \det A \neq 0$. Последната матрица е известната матрица на Вандермонд. Може да се покаже, че тя е обратима тогава и само тогава, когато възлите в нея са различни, т.е. $x_i \neq x_j$ за $i \neq j, i, j = \overline{0, n}$. Тъй като в постановката на Лагранж, която разглеждаме, възлите са различни по условие, то тогава задачата за намиране на интерполационния полином ще има и то единствено решение при всеки избор на **различни** възли.

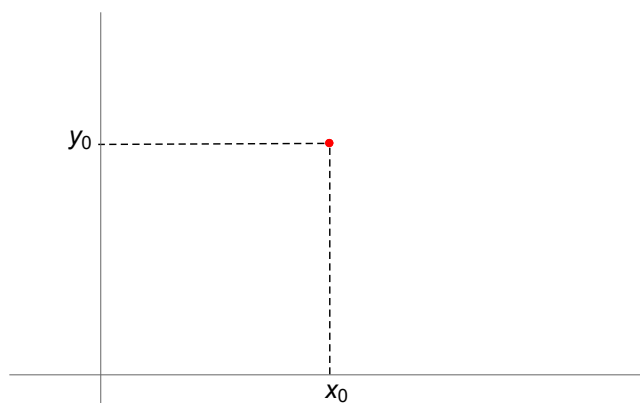
И така, съществува и то единствен полином от π_n , интерполиращ таблицата

x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
y_0	y_1	y_2	\dots	y_n

Да обърнем внимание, че за да определим един полином $p(x) \in \pi_n$ трябва да намерим коефициентите в неговото представяне $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Последната интерполационна таблица задава точно $n + 1$ условия, колкото е и броят на неизвестните коефициенти.

Нека преди да продължим да разгледаме няколко частни случая за броя на интерполационните условия в интерполационната задача на Лагранж. Целта е да илюстрираме зависимостта на полинома от разположението на точките $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

- 1 условие: графиката на полинома да минава през точката (x_0, y_0)

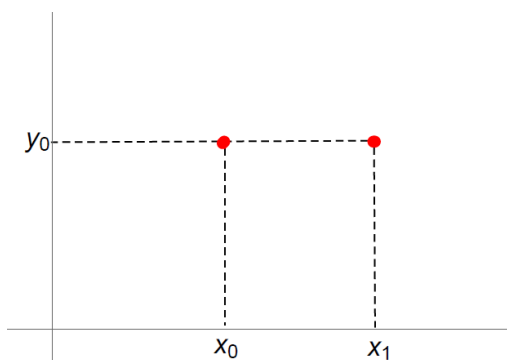


Търсим полином от π_0 (т.е. константа), чиято графика минава през точката (x_0, y_0) . Очевидно $p(x) \equiv y_0$.

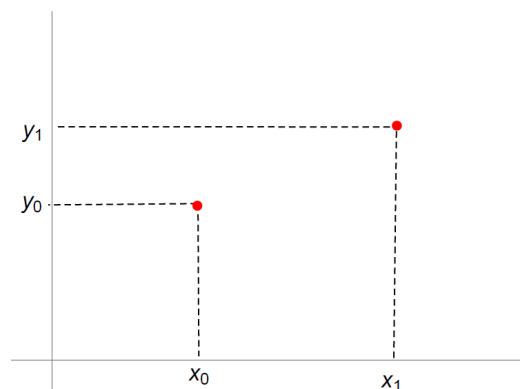
- 2 условия: графиката на полинома да минава през точките $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$

В този случай степента на полинома ще зависи от разположението на точките, които са дадени:





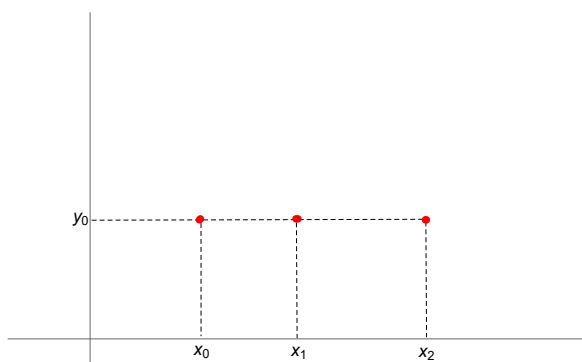
(а) Ако $y_0 = y_1$, то полиномът, който интерполира двете точки, ще е от нулева степен ($p(x) \equiv y_0$).



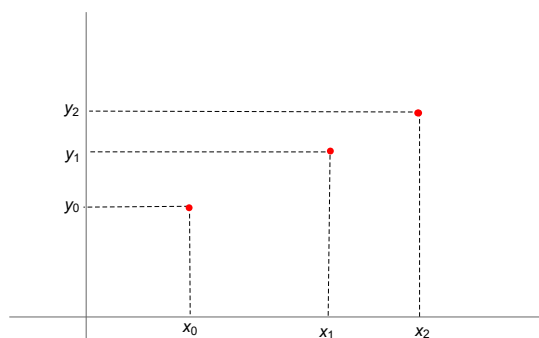
(б) Ако $y_0 \neq y_1$, то полиномът, който интерполира двете точки, ще е от първа степен.

- 3 условия: графиката на полинома да минава през точките (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2)

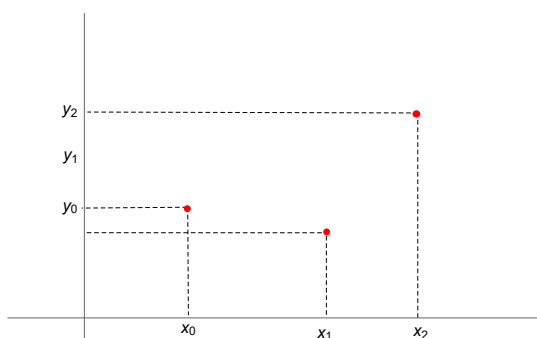
В този случай полиномът, който търсим, е от π_2 , което означава, че в зависимост от разположението на точките, той ще бъде от нулева, първа или втора степен:



(а) Интерполационният полином е от нулева степен.



(б) Интерполационният полином е от първа степен.



(в) Интерполационният полином е от втора степен.

1.1 Интерполационна формула на Лагранж

Както вече казахме, интерполационния полином, решение на (1.1), можем да определим като просто решим получената система. Когато решаваме дадена задача обаче е хубаво да можем да я решим по няколко различни начина. За задачата на Лагранж съществуват няколко анали-



тични формули, по които можем да определим съответния единствен полином. Най-напред ще разгледаме така наречената **интерполационна формула на Лагранж**.

Твърдение 1. Полиномът $p(x)$, удовлетворяващ (1.1), се представя по формулата

$$p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x), \quad (1.2)$$

където $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ са полиноми от степен точно n и удовлетворяват условията

$$\begin{aligned} l_0(x_0) &= 1, \quad l_0(x_1) = 0, \quad l_0(x_2) = 0, \dots, \quad l_0(x_n) = 0, \\ l_1(x_0) &= 0, \quad l_1(x_1) = 1, \quad l_1(x_2) = 0, \dots, \quad l_1(x_n) = 0, \\ &\vdots \\ l_n(x_0) &= 0, \quad l_n(x_1) = 0, \quad l_n(x_2) = 0, \dots, \quad l_n(x_n) = 1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

или записано еквивалентно

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad k, i = \overline{0, n}.$$

Лесно можем да проверим, че ако изберем полиномите $l_k(x), k = \overline{0, n}$, в (1.2) така, че да изпълняват условията (1.3), то $p(x)$ ще удовлетворява условията (1.1). Наистина

$$\begin{aligned} p(x_0) &= y_0 l_0(x_0) + y_1 l_1(x_0) + \dots + y_n l_n(x_0) = 1y_0 + 0y_1 + \dots + 0y_n = y_0, \\ p(x_1) &= y_0 l_0(x_1) + y_1 l_1(x_1) + \dots + y_n l_n(x_1) = 0y_0 + 1y_1 + \dots + 0y_n = y_1, \\ &\vdots \\ p(x_n) &= y_0 l_0(x_n) + y_1 l_1(x_n) + \dots + y_n l_n(x_n) = 0y_0 + 0y_1 + \dots + 1y_n = y_n. \end{aligned}$$

Последното твърдение ни казва, че ако искаме да определим полинома $p(x)$ по формулата на Лагранж, трябва да определим базисните полиноми на Лагранж, така че те да удовлетворяват условията (1.3). За тях са в сила формулите:

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}, \\ l_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}, \\ &\vdots \\ l_k(x) &= \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}, \\ &\vdots \\ l_n(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} \end{aligned}$$

или записано по-удобно

$$l_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

И така, за интерполационния полином е в сила **интерполационната формула на Лагранж**:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$



Забележка: Проверете сами, че условията (1.3) са в сила за така построените базисни полиноми! Понякога, за да подчертаем степента на полиномите $l_k(x)$, ще използваме означението $l_{kn}(x)$ (k -тият базисен полином е от n -та степен).

Нека сега решим два примера за определяне на интерполационния полином по формулата на Лагранж.

Задача 1. Да се намери полином от степен, ненадминаваща 2, който интерполира данните

x	1	3	5
y	2	4	6

като се използва интерполационната формула на Лагранж.

Решение. Търсим $p(x) \in \pi_2$ във вида

$$p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x).$$

От горната формула за базисните полиноми на Лагранж имаме:

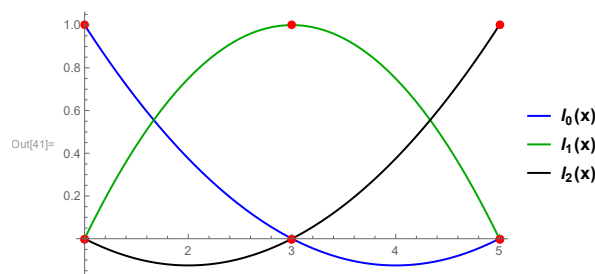
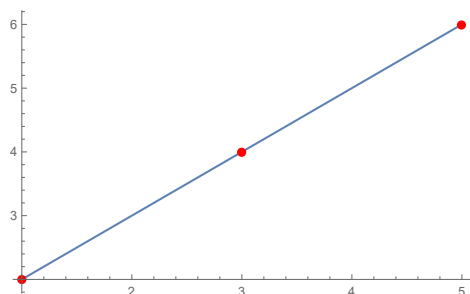
$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)} = \frac{(x-3)(x-5)}{8}, \\ l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-5)}{(3-1)(3-5)} = -\frac{(x-1)(x-5)}{4}, \\ l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{8}. \end{aligned}$$

Заместваме последните във формулата на Лагранж и получаваме

$$\begin{aligned} p(x) &= y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) \\ &= 2 \frac{(x-3)(x-5)}{8} + 4 \left(-\frac{(x-1)(x-5)}{4} \right) + 6 \frac{(x-1)(x-3)}{8} = x + 1. \end{aligned}$$

Забележка: След като намерите полинома на Лагранж, е добре да направите проверка дали той удовлетворява интерполационните условия от задачата, за да проверите дали не сте сбъркали при пресмятането.

На следващите две графики са дадени точките и интерполационният полином, както и съответните базисни полиноми.



От графиките на базисните полиноми ясно се вижда, че те наистина изпълняват условията (1.3). □



Ако стойностите y_0, y_1, \dots, y_n са стойности на някоя функция $f(x)$ в точките x_0, x_1, \dots, x_n , ще казваме, че полиномът интерполира функцията f и ще го бележим с $L_n(f; x)$ (интерполационен полином на Лагранж от степен n за функцията f). Тогава е в сила формулата

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_{kn}(x).$$

Задача 2. Дадена е функцията $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Да се намери полиномът от π_3 , който интерполира $f(x)$ в точките $-0.5, 0, 0.5, 1$. Да се използва последният, за да се пресметне приближено стойността на f в точките $\pm 2/3$. Да се пресметне грешката между точната и приближената стойност.

Решение. Да запишем интерполационната таблица, отговаряща на условието в задачата:

x	-0.5	0	0.5	1
$f(x)$	2	1	$2/3$	$1/2$

Имаме

$$L_3(f; x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x).$$

Намираме базисните полиноми

$$l_0(x) = \frac{(x-0)(x-0.5)(x-1)}{(-0.5-0)(-0.5-0.5)(-0.5-1)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x+0.5)(x-0.5)(x-1)}{(0+0.5)(0-0.5)(0-1)},$$

$$l_2(x) = \frac{(x+0.5)x(x-1)}{(0.5+0.5)(0.5-0)(0.5-1)},$$

$$l_3(x) = \frac{(x+0.5)(x-0)(x-0.5)}{(1+0.5)(1-0)(1-0.5)}$$

и ги заместяваме във формулата на Лагранж:

$$L_3(f; x) = 2l_0(x) + 1l_1(x) + \frac{2}{3}l_2(x) + \frac{1}{2}l_3(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{7}{6}x + 1.$$

(Проверете самостоятелно, че така намереният $L_3(f; x)$ удовлетворява интерполационните условия!)

Да пресметнем $f(\pm 2/3)$ и $L_3(f; \pm 2/3)$. Имаме

$$f(-2/3) = 3, \quad L_3(f; -2/3) = 208/81, \quad f(2/3) = 3/5, \quad L_3(f; 2/3) = 50/81.$$

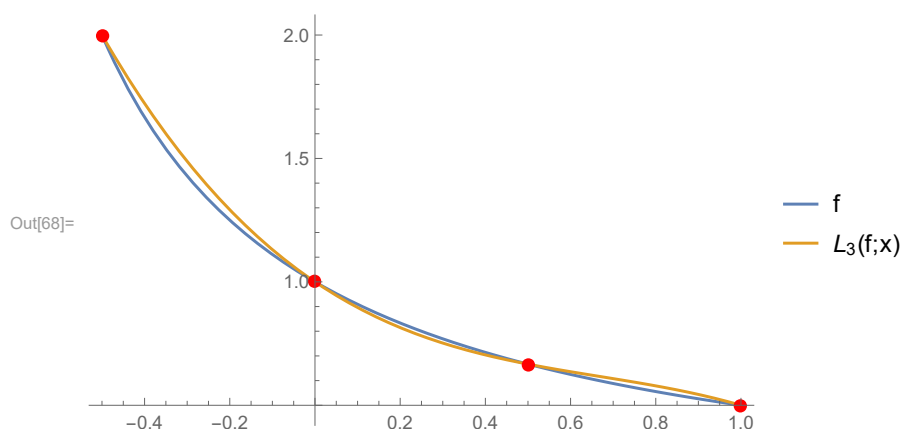
Тогава за грешката в двете точки имаме

$$f(-2/3) - L_3(f; -2/3) = 35/81 \approx 0.432099, \quad f(2/3) - L_3(f; 2/3) = -7/405 \approx -0.017284.$$

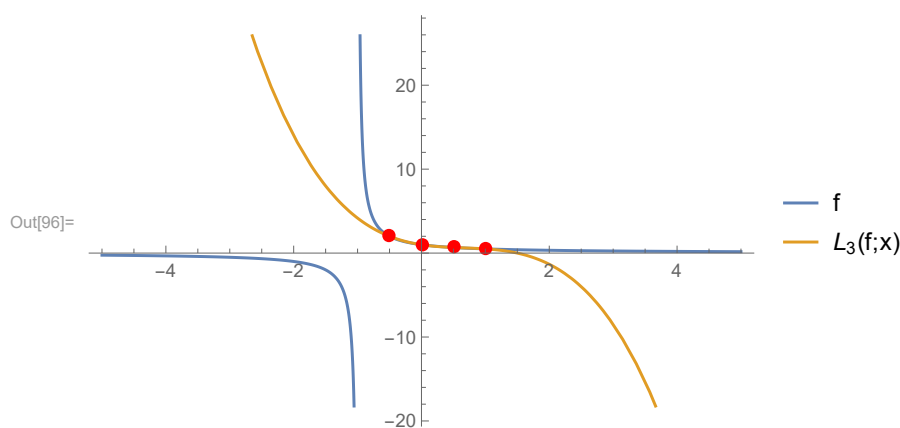
Да обърнем внимание, че грешката в точката $-2/3$ е по-голяма от тази в $2/3$. Последното е пряко свързано с факта, че $-2/3$ е извън интервала на интерполация (т.е. между първия и последния възел).

Нека отново видим графиката на функцията и интерполационния ѝ полином в интервала на интерполация:



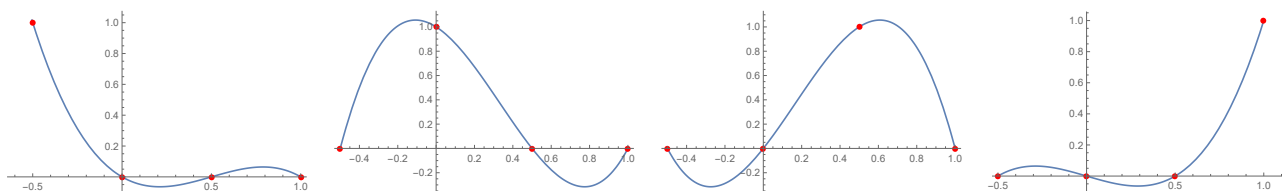


От графиката се вижда, че в интервала на интерполация $[-0.5, 1]$ полиномът $L_3(f; x)$ приближава добре функцията $f(x)$. Нека сега разгледаме двете графики в по-голям интервал, например $[-5, 5]$.



В този пример съвсем ясно се вижда, че при използване на интерполационния полином грешката от приближение е по-малка в интервала на интерполация, отколкото извън него. Използването на интерполационния полином, за да се пресметнат приближени стойности на функцията f извън интервала на интерполация се нарича **екстраполация**. За да не се налага екстраполация, е важно взлите да се избират подходящи за нашите цели (ако това е възможно).

Преди да продължим, да илюстрираме съответните базисни полиноми на Лагранж и в този случай.



□

Интересен случай за задачата на Лагранж е когато функцията, която интерполираме, също е полином. Разбира се, ако са дадени $n + 1$ интерполационни точки, а функцията $f \in \pi_m, m > n$,



то тогава приближаваме полинома f с интерполационен полином от по-ниска степен (съответно π_n). Нека сега покажем, че ако f също е от π_n , то $f \equiv L_n(f; x)$. Този факт, макар и очевиден, има много сериозни следствия в теорията на числените методи.

Задача 3. Да се покаже, че ако $f \in \pi_n$, то $L_n(f; x) \equiv f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, каквито и да са възлите на интерполация $\{x_k\}_{k=0}^n, x_k \neq x_i$ за $i \neq k$.

Доказателство. Нека за определеност са дадени различни възли $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Да разгледаме разликата (грешката)

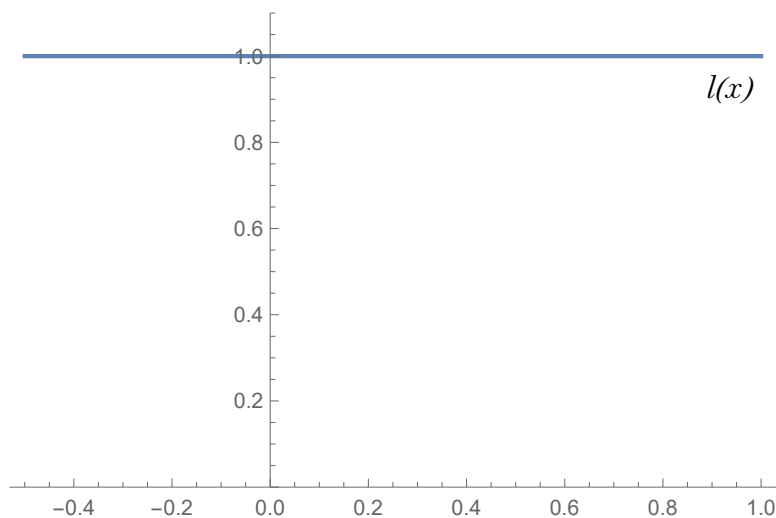
$$R(x) = f(x) - L_n(f; x).$$

Последното очевидно е от π_n . Освен това

$$R(x_i) = f(x_i) - L_n(f; x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0, i = \overline{0, n}.$$

Получихме, че $R(x)$ е полином от степен, ненадминаваща n , и освен това има $n + 1$ нули. От последното следва, че $R(x) \equiv 0$, т.е. $f(x) \equiv L_n(f; x), \forall x$. \square

Следващите няколко задачи имат за цел да илюстрират и затвърдят това важно свойство. Ще използваме последната задача, за да покажем едно интересно свойство на базисните полиноми на Лагранж. Може да се покаже, че сумата на базисните полиноми на Лагранж е единица във всяка точка x (проверете например за задача 1 като опростите израза). Действително, графиката на сумата на базисните полиноми за задача 2 е



Фигура 1.4: Графика на полинома $l(x) = \sum_{i=0}^2 l_i(x)$.

Оказва се, че последното е вярно за всяка интерполационна задача на Лагранж (т.е. за всеки избор на възлите и степента n).

Задача 4. Нека $l_{kn}(x), k = \overline{0, n}$, са базисните полиноми на Лагранж, съответни на възлите x_0, \dots, x_n . Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^n l_{kn}(x) = 1, \forall x.$$



Доказателство. Да припомним, че

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_{kn}(x), \forall x.$$

От условието на задачата се вижда, че лявата част се получава за $f(x) \equiv 1$. Тъй като $f(x) \equiv 1 \in \pi_n$, то от задача 3 следва, че $f(x) \equiv L_n(f; x)$. Имаме $L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_{kn}(x) \stackrel{f(x_k)=1}{=} \sum_{k=0}^n l_{kn}(x)$ и следователно $\sum_{k=0}^n l_{kn}(x) \equiv 1, \forall x$, което трябваше да докажем. \square

Задача 5. Да се докаже, че $\sum_{k=0}^n x_k^m l_{kn}(x) = x^m, m = \overline{0, n}$.

Доказателство. Ще постъпим аналогично на предходната задача.

Да изберем функцията, която интерполираме да бъде $f(x) \equiv x^m, m = \overline{0, n}$. Отново от задача 3 следва, че $f(x) \equiv L_n(f; x)$. Заместваме във формулата на Лагранж и получаваме:

$$\sum_{k=0}^n f(x_k) l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^n x_k^m l_{kn}(x) \equiv x^m, \forall x,$$

което трябваше да докажем. \square

Задача 6. Да се докаже, че $\sum_{k=0}^n (x - x_k)^m l_{kn}(x) = 0, m = \overline{1, n}$.

Доказателство. Разглеждаме функцията $f(t) = (x - t)^m$, където x е някакво фиксирано число. Тъй като $f(t) \in \pi_n$, за $m = \overline{0, n}$, то функцията f съвпада с интерполационния си полином $L_n(f; t)$. Заместваме във формулата на Лагранж за интерполационни възли x_0, \dots, x_n и получаваме

$$L_n(f; t) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_{kn}(t) = \sum_{k=0}^n (x - x_k)^m l_{kn}(t) \equiv (x - t)^m, \forall t, m = \overline{1, n}.$$

Тъй като последното е в сила за всяко t , то нека изберем $t = x$. Заместваме и получаваме исканото твърждение

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n (x - x_k)^m l_{kn}(t) \equiv (x - x)^m \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n (x - x_k)^m l_{kn}(x) = 0, m = \overline{1, n}.$$

\square

Преди да продължим, нека запишем интерполационната формула на Лагранж в по-удобен вид. Въвеждаме означението $\omega(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$. Да изразим базисните полиноми на Лагранж чрез $\omega(x)$. Имаме

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

Лесно се вижда, че са в сила следните твърждения

$$\begin{aligned} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n) &= \frac{\omega(x)}{x - x_k}, \\ (x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n) &= \omega'(x_k). \end{aligned}$$



От последните две следва, че $l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}$ и за интерполационния полином на Лагранж е в сила формулата

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}. \quad (1.4)$$

Коментар: В последната формула се вижда, че дясната страна е недефинирана за $x = x_k$. Тъй като $L_n(f; x)$ е непрекъсната функция за всяко x (полином от π_n), то (1.4) в точката $x = x_k$ би следвало да се интерпретира като граничен преход при $x \rightarrow x_k$, т.е.

$$L_n(f; x_k) = \lim_{x \rightarrow x_k} \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}.$$

Допълнителни задачи

Задача 7. Като използвате интерполационната формула на Лагранж, намерете полинома $p \in \pi_2$, който удовлетворява условията $p(-1) = -1/2$, $p(1) = 1$, $p(2) = 3$. Представете $p(x)$ по степените на x .

Задача 8. Да се построи полиномът на Лагранж от трета степен, който удовлетворява условията $L_3(x_k) = y_k$, където $x_k = k - 2$, $y_k = 2k^3 + 1$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Задача 9. Дадена е функцията $f(x) = \frac{1}{1+4x^2}$. Да се намери интерполационният полином на Лагранж, който интерполира f във възлите $-1, -1/2, 0, 1/2, 1$.

Задача 10. Като се използва интерполационната формула на Лагранж, без да се разкриват скобите, да се опрости изразът

$$-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-2)(x-3) - \frac{3}{2}x(x-1)(x-3) + \frac{2}{3}(x-1)(x-2)x.$$

Задача 11. Нека са дадени различни интерполационни възли x_0, x_1, \dots, x_n и са построени съответните им базисни полиноми $l_{kn}(x)$. Да се докаже равенството

$$\sum_{k=0}^n (x-x_k)^{n+1} l_{kn}(x) = (-1)^n (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$$

1.2 Теорема за оценка на грешката за интерполационната задача на Лагранж

Досега показахме как можем да намерим алгебричен полином от степен $\leq n$, който интерполира дадени точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Последният може да бъде намерен аналитично, като се използва формулата на Лагранж:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x).$$

Полинома може да използваме, за да намерим приближено стойността на функция f в някаква точка x от интервала на интерполация $[x_0, x_n]$ (или евентуално извън него – екстраполация). Интересен и изключително важен е въпросът каква всъщност грешка сме направили, като сме използвали този полином вместо функцията f . Оказва се, че (вж. лекции) грешката може да бъде изведена аналитично и е в сила следната **теорема за оценка на грешката при интерполационната задача на Лагранж**.



Теорема 1. Нека $[a, b]$ е даден краен интервал и точките x_0, \dots, x_n са **различни** точки в него. Нека още f има непрекъснати производни до ред $n + 1$ включително в интервала $[a, b]$. Тогава за всяко x от $[a, b]$ \exists число $\xi = \xi(x) \in [a, b]$ такава, че

$$f(x) - L_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \quad (1.5)$$

Преди да продължим, да обърнем внимание на няколко неща в горната теорема. Последната ни казва, че ако искаме да пресметнем грешката в някоя точка $x \in [a, b]$, то тя ще бъде точно равна на дясната страна в (1.5). Тъй като обаче за всяко x числото ξ е различно и освен това то на практика не може да се определи, последната теорема често се използва за намиране на някаква оценка на грешката (затова е и известна като **теорема за оценка на грешката**). Когато говорим за грешка, ние често няма да се интересуваме от нейния знак, т.е. дали надценяваме или подценяваме истинския резултат, а ще се интересуваме от това колко далеч се намираме от реалната стойност, т.е. ще разглеждаме грешката, взета по модул:

$$|f(x) - L_n(f; x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \right|.$$

От горното лесно се вижда, че ако можем да направим оценка отгоре на $(n + 1)$ -вата производна за $\xi \in [a, b]$, то можем да дадем оценка отгоре на грешката по модул за всяко $x \in [a, b]$. С други думи, ако $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M_{n+1}$, където $M_{n+1} \in \mathbb{R}$, то

$$|f(x) - L_n(f; x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|.$$

Нещо повече, ако поискаме да дадем оценка отгоре на грешката по модул за целия интервал $[a, b]$, е в сила

$$|f(x) - L_n(f; x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|.$$

Задача 1. Да се намери грешката, която се допуска при приближение на $f(x) = \frac{1}{1+x}$ в интервала $[0, 1]$ с интерполационния полином на Лагранж от първа степен с възли 0 и 1 и да се направи оценката на грешката (по модул) отгоре в $[0, 1]$:

(а) в произволна точка x ;

(б) в целия интервал $[0, 1]$.

Решение. От теоремата за оценка на грешката имаме

$$R(x) := f(x) - L_1(f; x) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} (x - 0)(x - 1),$$

за някое $\xi \in [0, 1]$. Да пресметнем втората производна

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3},$$

взета в точката ξ , и да я заместим по-горе. Имаме

$$R(x) = \frac{2}{2!(\xi+1)^3} x(x-1) = \frac{1}{(\xi+1)^3} x(x-1).$$



- (а) Нека сега видим как изглежда оценката на грешката по модул за произволно x в интервала. Имаме

$$|R(x)| = \left| \frac{1}{(\xi + 1)^3} \right| |x(x - 1)|.$$

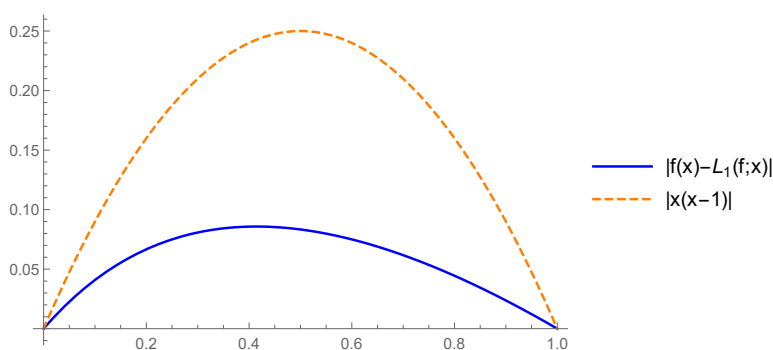
За $\xi \in [0, 1]$ е в сила неравенството

$$\left| \frac{1}{(\xi + 1)^3} \right| = \frac{1}{(\xi + 1)^3} \leq \frac{1}{(1 + 0)^3} = 1,$$

което влече

$$|R(x)| = \left| \frac{1}{(\xi + 1)^3} \right| |x(x - 1)| \leq |x(x - 1)|, \forall x \in [0, 1]. \quad (1.6)$$

Неравенство (1.6) следва от факта, че $\frac{1}{(\xi + 1)^3}$ има максимална стойност за $\xi \in [0, 1]$ в точката $\xi = 0$. На практика полученото неравенство означава, че графиката на функцията на грешката, взета по модул, се мажорира от графиката на функцията $|x(x - 1)|$.



Фигура 1.5: Графика на $|R(x)|$ и мажориращата я функция $|x(x - 1)|$.

- (б) Нека сега направим оценка отгоре за целия интервал $[0, 1]$, т.е. да максимизираме по x оценката на грешката. С други думи, искаме да определим максималната стойност на $|x(x - 1)|$ в интервала $[0, 1]$. Последната функция очевидно има максимална стойност в точката $x = 1/2$, в която се намира върхът на параболата (максимумът може да се намери и като се вземат екстремалните точки на функцията в интервала). Следователно за всяко $x \in [0, 1]$ имаме

$$|R(x)| \leq \left| \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right| = \frac{1}{4}.$$

Да отбележим, че $1/4$ е оценка на грешката отгоре. На практика тя не се достига (вж. Фиг. 1.5). \square

Задача 2. Нека е дадена функция f с непрекъснати производни до ред 2 включително в интервала $[x_0, x_1]$, т.е. $f \in C^2[x_0, x_1]$, където x_0, x_1 са интерполационни възли. Нека още е изпълнено $\max_{x \in [x_0, x_1]} |f''(x)| = M$. Да се докаже, че при $x \in [x_0, x_1]$ е в сила

$$|f(x) - L_1(f; x)| \leq \frac{M}{8}(x_1 - x_0)^2.$$



Доказателство. От теоремата за оценка на грешката имаме

$$f(x) - L_1(f; x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1).$$

Да вземем по модул двете страни и да направим оценка отгоре:

$$|f(x) - L_1(f; x)| = \left| \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1) \right| = \frac{|f''(\xi)|}{2} |(x - x_0)(x - x_1)| \leq \frac{M}{2} |(x - x_0)(x - x_1)|.$$

И така, искаме да намерим максимума на функцията $|(x - x_0)(x - x_1)|$ по отношение на x . Последната отново достига максимума си в средата на интервала и следователно той е в т. $(x_0 + x_1)/2$. Заместваме в горната оценка и получаваме

$$|f(x) - L_1(f; x)| \leq \frac{M}{2} |(x - x_0)(x - x_1)| \leq \frac{M}{2} \left| \left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_0 \right) \left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_1 \right) \right| = \frac{M(x_1 - x_0)^2}{8}.$$

□

Да повторим, че в общия случай, ако $\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$, $n = 0, 1, \dots$ (т.е. $\max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \leq M_1$, $\max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \leq M_2$ и т.н.), то

$$|R_n(f; x)| = |f(x) - L_n(f; x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |(x - x_0) \dots (x - x_n)|.$$

Задача 3. Нека е дадена функцията $f(x) = \sqrt{x}$ и в интервала $[1, 2]$ е въведена равномерна мрежа от $n+1$ точки, взети през стъпка $h = 1/n$, т.е. $x_0 = 1, x_1 = 1+h, x_2 = 1+2h, \dots, x_n = 1+nh = 2$. Да се определи стъпката h така, че функцията $f(x)$ да може да се приближава в $[1, 2]$ с точност 0.001 с полином от втора степен, интерполиращ f в най-близките до x възли от системата $\{x_k\}_{k=0}^n$.

Решение. Нека фиксираме произволно x в интервала $[1, 2]$ и да означим най-близките три възела до x съответно с x_{i-1}, x_i, x_{i+1} . Нека още $p_i(x)$ интерполира f в x_{i-1}, x_i, x_{i+1} . От теоремата за оценка на грешката имаме

$$\begin{aligned} |f(x) - p_i(x)| &= \left| \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1}) \right| = \left| \frac{3}{8\xi^{5/2}}(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1}) \right| \\ &= \left| \frac{3}{48\xi^{5/2}}(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1}) \right| \leq \frac{1}{16} |(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})|. \end{aligned}$$

В последното неравенство използвахме, че максимума на $\left| \frac{1}{\xi^{5/2}} \right|$ за $\xi \in [1, 2]$ се достига при $\xi = 1$.

Искаме да дадем оценка на грешката отгоре в $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ като я изразим спрямо стъпката h . За целта нека изразим $x_{i-1} = x_i - h$, $x_{i+1} = x_i + h$. Замествайки последното в $|R(x)|$, получаваме

$$|R(x)| \leq \frac{1}{16} |(x - (x_i - h))(x - x_i)(x - (x_i + h))| = \frac{1}{16} |(x - x_i + h)(x - x_i)(x - x_i - h)|.$$



Ще намерим максимума на последното като израз на параметъра h , като първо изключим x_i от израза в дясната страна. За целта нека направим смяна на променливата $t := x - x_i$. Тъй като $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$, то от смяната следва, че $t \in [-h, h]$. Да заместим последното в израза за грешката:

$$|R(x)| = |R(x_i + t)| \leq \frac{1}{16} |(t+h)t(t-h)|.$$

Остава да намерим максимума на функцията в дясната страна на последното неравенство за $t \in [-h, h]$. Да определим екстремалните точки на функцията $\varphi(t) := (t-h)t(t+h) = t^3 - th^2$. Имаме

$$\varphi'(t) = 3t^2 - h^2 \Rightarrow \varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

Максималната стойност по модул в интервала $[-h, h]$ ще бъде измежду екстремалните точки и двата края на интервала, т.е. точките $\pm h, \pm \frac{h}{\sqrt{3}}$. Имаме

$$\varphi(\pm h) = 0, \varphi\left(-\frac{h}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2h^3}{3\sqrt{3}}, \varphi\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2h^3}{3\sqrt{3}}.$$

Следователно получихме, че максималната по модул стойност е

$$\left| \varphi\left(\pm \frac{h}{\sqrt{3}}\right) \right| = \frac{2h^3}{3\sqrt{3}}$$

и тогава

$$|R(x)| \leq \frac{1}{16} \cdot \frac{2h^3}{3\sqrt{3}} = \frac{h^3}{24\sqrt{3}}.$$

Остава да поискаме точността на приближение да е не по-лоша от 0.001. Последното е еквивалентно на това максималната грешка да бъде ≤ 0.001 . Имаме

$$\frac{h^3}{24\sqrt{3}} \leq 0.001 \Leftrightarrow h \leq \frac{2\sqrt{3}}{10}.$$

□

Задача 4. Да се намери оценка на грешката $R_n(x) = f(x) - L_n(f; x)$ при $f(x) = \sin x$ и интерполационни възли $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ и да се покаже, че в този случай $\max_{x \in [a, b]} |R_n(x)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Решение. От теоремата за оценка на грешката имаме

$$f(x) - L_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n).$$

Очевидно $f^{(n+1)}(\xi) \in \{\pm \sin \xi, \pm \cos \xi\}$. Тъй като последните тригонометрични функции са ограничени по модул отгоре от 1, за всяко ξ , то получаваме

$$|f(x) - L_n(f; x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |x - x_0| \dots |x - x_n|.$$

Ако успеем да покажем, че оценката отгоре клони към 0 при $n \rightarrow \infty$, то и $|R_n(x)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тъй като $x \in [a, b]$, то всеки от изразите (равни на дължините на интервалите между x и x_0 , x и x_1, \dots, x и x_n , съответно)

$$|x - x_0|, \dots, |x - x_n|$$



ще бъде ограничен отгоре от дължината на интервала $[a, b]$, т.е.

$$|f(x) - L_n(f; x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{|(x-x_0)|}_{\leq b-a} \cdots \underbrace{|(x-x_n)|}_{\leq b-a} \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

За дясната страна в неравенството очевидно е в сила

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

откъдето $|R(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. □

Последната задача показва, че при интерполация на функцията $\sin x$ (аналогично на $\cos x$) с нарастване на броя на интерполационните възли намалява оценката на грешката, т.е. колкото повече възли избираме, толкова по-точно ще приближаваме функцията. В следващата глава ще покажем, че всъщност увеличаването на броя на интерполационните възли за произволна функция може да доведе до сериозни грешки от интерполация.

Допълнителни задачи

Задача 5. Функцията $f(x) = \ln(x)$ се интерполира с полином на Лагранж, минаващ през точките $(1, f(1))$, $(2, f(2))$ и $(4, f(4))$. Като използвате теоремата за оценка на грешката, дайте оценка отгоре на грешката по модул.

Задача 6. Да се покаже, че грешката, която се допуска при приближаване на $f(x) = e^{2x}$ в интервала $[-1/2, 1/2]$ с интерполационния полином на Лагранж от втора степен, построен за възли $-1/2, 0, 1/2$, не надминава $\sqrt{3}/9$.

Задача 7. Нека $f \in C^2[0, 1]$ и е известно, че $|f''(x)| \leq x^2, \forall x \in [0, 1]$. Да означим с $p_\xi(x)$ по части линейната в $[0, \xi]$ и $[\xi, 1]$ непрекъсната функция, която интерполира f в точките $0, \xi, 1$. Да се определи ξ така, че

$$|f(x) - p_\xi(x)| \leq 0.02 \quad \text{в интервала } [0, 1].$$



Глава 2

Полиноми на Чебишов

В миналата глава разгледахме теоремата за оценка на грешката при интерполация и показахме, че ако $f \in C^{n+1}[a, b]$ и $\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$, то е в сила

$$|f(x) - L_n(f; x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |(x-x_0) \dots (x-x_n)|.$$

Естествено е за различни възли x_0, \dots, x_n получените функции $|(x-x_0) \dots (x-x_n)|$ да достигат различна максимална стойност в интервала $[a, b]$. Бихме могли да си зададем въпроса може ли да изберем възли x_0^*, \dots, x_n^* така, че оценката на грешката (отгоре) за тях да бъде минимална спрямо всички останали оценки за различните възли на интерполация, т.е.

$$\max_{x \in [a, b]} |(x-x_0^*)(x-x_1^*) \dots (x-x_n^*)| \leq \max_{x \in [a, b]} |(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)|.$$

С други думи, търсим полинома от вида $(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)$, който най-малко се отклонява от нулата. В този смисъл може да кажем, че търсим полином, при който получаваме най-добра интерполация, в смисъл на минимална оценка отгоре на грешката по модул за всяко $x \in [a, b]$.

Отговорът на този въпрос се крие в така наречените **полиноми на Чебишов от първи род**.

Определение 1. Полином на Чебишов от първи род ще наричаме функцията

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1], n \in \mathbb{N}.$$

От горната дефиниция се вижда, че $|T_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1]$. Да припомним някои особености и характеристики на полиномите $T_n(x)$, изведени на лекции:

1. В сила е рекурентната връзка

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x).$$

Нека запишем явния вид на първите няколко полинома на Чебишов, като използваме рекурентната връзка:

$$T_0(x) = \cos(0 \arccos x) = \cos 0 = 1,$$

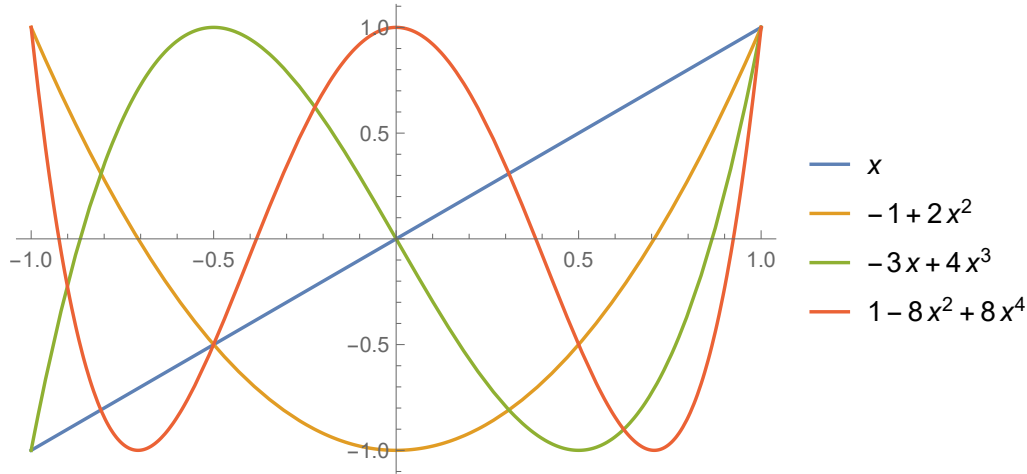
$$T_1(x) = \cos(1 \arccos x) = x,$$

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$





Фигура 2.1: Графика на $T_n(x)$ за $n = \overline{1, 4}$ в интервала $[-1, 1]$.

От графиката на полиномите на Фиг. 2.1 можем да забележим, че $T_n(1) = 1, T_n(-1) = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Последното може да се покаже и аналитично.

2. $T_n(x)$ съвпада с алгебричен полином от степен n със старши коефициент 2^{n-1} , т.е.

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{0, n}. \quad (2.1)$$

3. Нули на полинома на Чебишов от първи род

Както вече казахме, полиномът на Чебишов от n -ти ред е алгебричен полином. Следователно $T_n(x)$ има най-много n нули. Нека ги определим.

$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos(n \arccos x) = 0 \Leftrightarrow n \arccos x = \frac{(2k-1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ &\Leftrightarrow x = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Следователно неговите n различни нули (ще ги бележим с ξ_k) се намират по формулата

$$\xi_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Важно е да обърнем внимание, че горните косинуси са в низходящ ред, т.е. $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$.

4. Екстремуми на $T_n(x)$

Други характерни точки за полинома на Чебишов $T_n(x)$, които се оказват много важни на практика, са неговите екстремални точки в $[-1, 1]$. Това са точките, в които $T'_n(x) = 0$, и точките ± 1 . Имаме:

$$-\frac{n \sin(n \arccos x)}{-\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sin(n \arccos x) = 0, \Leftrightarrow n \arccos x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тъй като $T'_n(x)$ е полином от степен $n-1$, то и неговите нули (ще ги означаваме с η_k) са

$$\eta_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (2.3)$$



Вземайки предвид, че $\eta_0 = 1, \eta_n = -1$, то екстремалните точки са

$$\eta_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Да обърнем внимание, че това са екстремални точки в интервала $[-1, 1]$, където $T_n(x)$ съвпада с $\cos(n \arccos x)$. Ако разгледаме интервала $(-\infty, \infty)$, точките ± 1 не са екстремални и полиномът има само $n - 1$ локални екстремума в $(-\infty, \infty)$, а именно $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$. Екстремалните точки също са подредени в низходящ ред, т.е. $\eta_0 > \eta_1 > \dots > \eta_n$.

И така, имаме

$$T_n(\eta_k) = \cos(n \arccos \eta_k) = \cos \left(n \arccos \left(\cos \frac{k\pi}{n} \right) \right) = \cos(k\pi) = (-1)^k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Да обърнем отново внимание, че максималната стойност на $|T_n(x)|$ в $[-1, 1]$ е 1 и се достига в точките η_k , като те се редуват. Такива точки, в които функцията си сменя последователно стойността по модул и тя е максимална, се наричат **точки на алтернанс**.

Полиномите на Чебишов се използват често, за да минимизират грешки от апроксимация. Оказва се, че при интерполацията именно нулите на полинома на Чебишов ни дават отговор на въпроса при кои възли x_0^*, \dots, x_n^* е изпълнено

$$\max_{x \in [a, b]} |(x - x_0^*)(x - x_1^*) \dots (x - x_n^*)| \leq \max_{x \in [a, b]} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|. \quad (2.4)$$

Последното следва непосредствено от следващата теорема.

Теорема 2. Нека $P(x)$ е произволен алгебричен полином от степен n със старши коефициент 2^{n-1} . Тогава

$$1 = \max_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| \leq \max_{x \in [-1, 1]} |P(x)|, \quad (2.5)$$

като равенство се достига това и само тогава, когато $T_n(x) \equiv P(x)$.

Последната теорема ни казва, че измежду всички полиноми от n -та степен със старши коефициенти 2^{n-1} (както е и $T_n(x)$, вж. (2.1)), най-малък максимум по модул в интервала $[-1, 1]$ има точно полиномът на Чебишов $T_n(x)$.

Да отбележим, че от (2.1) и (2.2) следва, че

$$T_n(x) = 2^{n-1}(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n).$$

Аналогично, ако x_0, \dots, x_n са нулите на $P(x)$, то

$$P(x) = 2^{n-1}(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Нека заместим последните в (2.5). Имаме

$$1 = 2^{n-1} \max_{x \in [-1, 1]} |(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n)| \leq \max_{x \in [-1, 1]} 2^{n-1} |(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)|.$$

Непосредствено от последното следва, че

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x \in [-1, 1]} |(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n)| \leq \max_{x \in [-1, 1]} |(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)|.$$

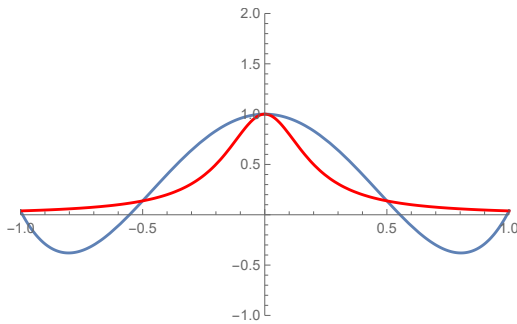


С други думи в интервала $[-1, 1]$ при избор на възли нулите на полинома на Чебишов (от съответната степен) получаваме най-добра интерполация в смисъл на минимална оценка отгоре на грешката по модул. Ако търсим най-добрите възли на интерполация (в смисъл на минимална оценка отгоре на грешката по модул) **в произволен интервал $[a, b]$** , то можем да използваме **смяната**

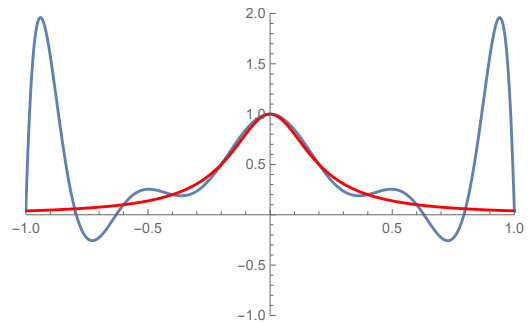
$$t_k = \frac{(b-a)}{2}\xi_k + \frac{a+b}{2},$$

при която $[-1, 1] \rightarrow [a, b]$.

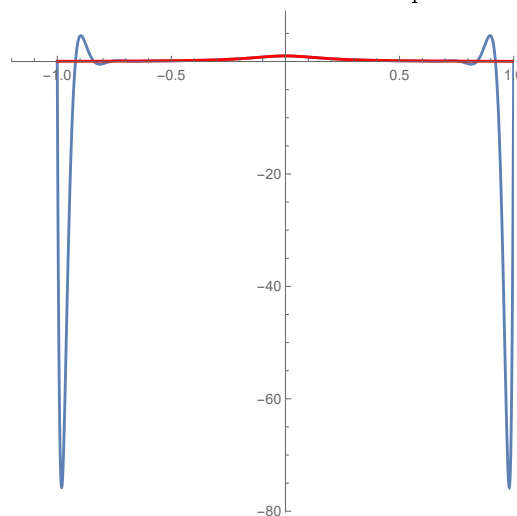
За да илюстрираме значимостта на Чебишовите възли, ще разгледаме задачата за интерполиране на **функцията на Рунге** $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, която е известен пример за трудна за интерполиране функция (проблемите при нейното приближаване са известни като феномен на Рунге). Нека разгледаме задачата за интерполиране на функцията на Рунге в интервала $[-1, 1]$ и изберем възлите на интерполация да бъдат равноотдалечени, като разделим интервала съответно на 5, 10, 30 равни части. Получените интерполационни задачи имат съответно 6, 11, 31 равноотдалечени възела и определят съответно интерполационни полиноми от степен 5, 10, 30. На графиката по-долу са показани функцията и получените интерполационни полиноми.



(а) Графика на функцията на Рунге (червено) и съответния интерполационен полином на Лагранж от пета степен (синьо) при $n = 5$.



(б) Графика на функцията на Рунге (червено) и съответния интерполационен полином на Лагранж от десета степен (синьо) при $n = 10$.



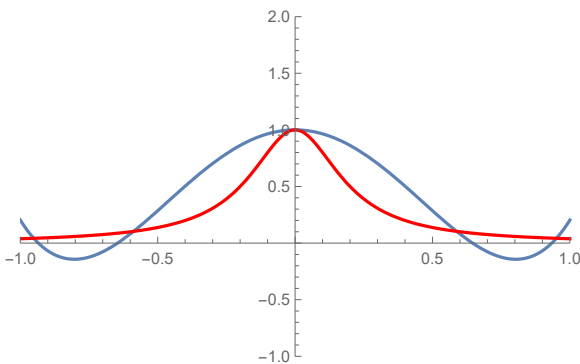
(в) Графика на функцията на Рунге (червено) и съответния интерполационен полином на Лагранж (синьо) при $n = 30$.

Фигура 2.2

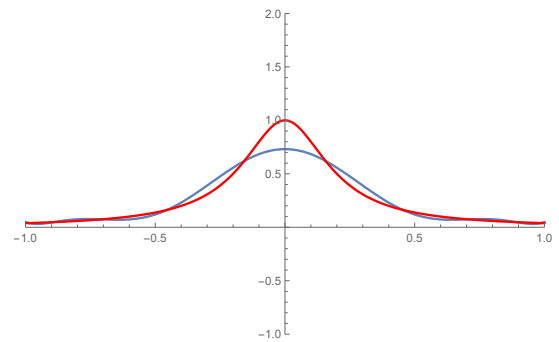


Както виждаме от трите графики, в този случай (за разлика от задачата за интерполиране на $\sin x$, където с увеличаване броя на възлите грешката клонеше към 0) увеличаването на броя на възлите, увеличава грешката от интерполация (обикновено по-голяма грешка се наблюдава в двата края на интервала). Причината за това е, че колкото повече възли на интерполация изберем, толкова по-голяма би била степента на получения алгебричен полином. За полиномите от висока степен обаче се наблюдава рязка промяна (скок) в поведението на полинома в относително малки интервали (вж. Фиг. 2.2 (в)). Затова обикновено, когато се решава произволна задача се препоръчва да се използват интерполационни полиноми от достатъчно ниска степен – например пета, шеста.

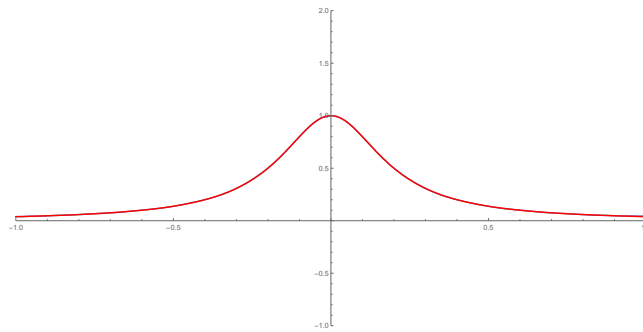
Нека сега изберем възлите на интерполация да бъдат Чебишовите възли, получени за $n = 5, 10, 30$, като се използва формула (2.2). На следващата графика можем да видим какво се случва с интерполационните полиноми в този случай.



(а) Графика на функцията на Рунге (червено) и съответния интерполационен полином на Лагранж от пета степен (синьо) при $n = 5$.



(б) Графика на функцията на Рунге (червено) и съответния интерполационен полином на Лагранж от десета степен (синьо) при $n = 10$.



(в) Графика на функцията на Рунге (червено) и съответния интерполационен полином на Лагранж (синьо) при $n = 30$.

Както виждаме от графиките, грешката от интерполация при избор на възли нулите на полинома на Чебишов действително намалява с увеличаването на n .

Задача 1. Нека $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots + a_1x + a_0$ е n -тият полином на Чебишов. Да се намери a_1 .

Задача 2. Напишете интерполационната формула на Лагранж с възли, съвпадащи с нулите на полинома на Чебишов от n -та степен, а именно

$$\xi_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, \dots, n.$$

Получения израз опростете така, че да го получите като функция само на възлите ξ_k , $T_n(x)$ и степента на полинома n .



Решение. За тази задача ще използваме представянето (1.4) на интерполационния полином на Лагранж. Имаме

$$L_{n-1}(f; x) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \frac{\omega(x)}{(x - \xi_k)\omega'(\xi_k)},$$

където $\omega(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_n)$. В сила са равенствата

$$\omega(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \Rightarrow \omega'(x) = \frac{T_n'(x)}{2^{n-1}}.$$

Да заместим двата израза във формулата за интерполационния полином. Имаме:

$$L_{n-1}(f; x) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \frac{\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}}{(x - \xi_k) \frac{T_n'(\xi_k)}{2^{n-1}}} = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \frac{T_n(x)}{(x - \xi_k) T_n'(\xi_k)}. \quad (2.6)$$

От друга страна

$$\begin{aligned} T_n'(x) &= \frac{n \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \\ T_n'(\xi_k) &= \frac{n \sin(n \arccos \xi_k)}{\sqrt{1-\xi_k^2}} = \frac{n \sin\left(n \arccos\left(\cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)}{\sqrt{1-\xi_k^2}} \\ &= \frac{n \sin \frac{(2k-1)\pi}{2}}{\sqrt{1-\xi_k^2}} = \frac{n(-1)^{k-1}}{\sqrt{1-\xi_k^2}}. \end{aligned}$$

Заместваме последното в (2.6) и получаваме

$$\begin{aligned} L_{n-1}(f; x) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \frac{T_n(x)}{(x - \xi_k)} \left(\frac{n(-1)^{k-1}}{\sqrt{1-\xi_k^2}} \right)^{-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{n} f(\xi_k) \frac{T_n(x) \sqrt{1-\xi_k^2}}{x - \xi_k} = \frac{T_n(x)}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} f(\xi_k) \frac{\sqrt{1-\xi_k^2}}{x - \xi_k}. \end{aligned}$$

Коментар: Последната формула значително намалява броя извършени аритметични операции в сравнение с формулата на Лагранж. Както знаем, броят извършени операции е от съществено значение, когато реализираме даден алгоритъм. \square

Вече показахме какво се случва с полинома $T_n(x)$ в интервала $[-1, 1]$. Сега ще разгледаме два частни случая, в които ще изследваме поведението на n -тия полином на Чебишов спрямо друг полином от π_n , удовлетворяващ конкретни условия, извън този интервал.

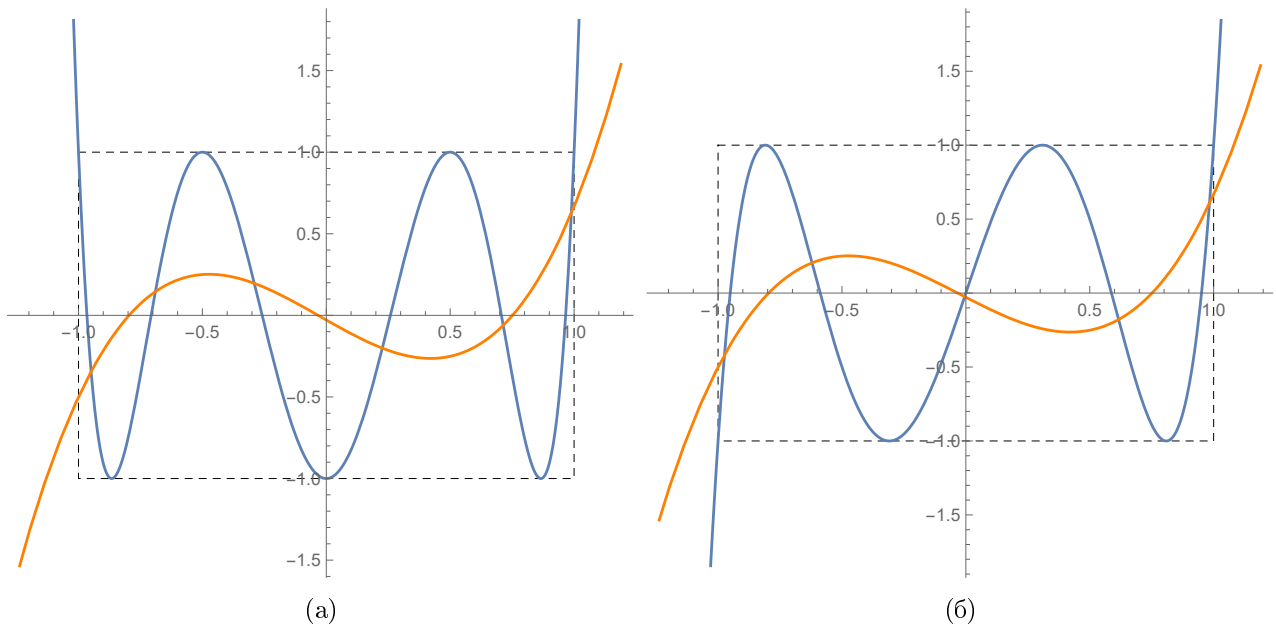
Задача 3. Нека $P \in \pi_n$ и $\max_{x \in [-1, 1]} |P(x)| < 1$. Да се докаже, че за $|x| > 1$ е изпълнено $|P(x)| < |T_n(x)|$.

Доказателство. Знаем, че n -тият полином на Чебишов има $n + 1$ екстремални точки в $[-1, 1]$, в които приема последователни стойности ± 1 (ще ги наричаме още **точки на алтернанс**). Това



означава, че $T_n(x)$ прегражда този интервал n на брой пъти. От последното е ясно, че тогава той пресича и $P(x)$ n пъти в $[-1, 1]$ и следователно разликата $T_n(x) - p(x)$ има n на брой нули в интервала.

От друга страна е в двата края на интервала е в сила $|T_n(\pm 1)| > |P(\pm 1)|$ (вж. Фиг. 2.4). Следователно, за да може $|P(x)|$ да мажорира $|T_n(x)|$ за някое $|x| > 1$, трябва двете криви да се пресекат в точка извън интервала. Да допуснем, че съществува такава точка ξ извън интервала $[-1, 1]$, в която двата полинома се пресичат. Тогава разликата им вече ще има $n + 1$ нули, но тъй като тя е полином от π_n (разлика на два полинома от π_n), то тя трябва да е тъждествено 0 и двата полинома биха съвпадали. Това, разбира се, е невъзможно тъй като те по условие приемат различни стойности в точките на алтернанс. Стигнахме до противоречие.



Фигура 2.4: Примерна графика на $T_n(x)$ (в синьо) и $P(x)$ (в оранжево) при (а) n -четно; (б) n -нечетно.

□

Задача 4. Нека $P(x) \in \pi_n$ и $|P(\eta_k)| \leq 1, k = \overline{0, n}$, където η_k са **точките на алтернанс** за $T_n(x)$. Да се докаже, че $|P(x)| \leq |T_n(x)|$ за $|x| \geq 1$.

Доказателство. За да покажем, че $|P(x)| \leq |T_n(x)|, |x| > 1$, ще използваме интерполационните полиноми на $P(x)$ и $T_n(x)$, построени за възли $\eta_k = \cos \frac{k\pi}{n}, k = \overline{0, n}$, и доказаното вече от нас, че ако $P(x) \in \pi_n$ и $T_n(x) \in \pi_n$, то $P(x) \equiv L_n(P; x)$ и $T_n(x) \equiv L_n(T_n; x)$. Имаме

$$P(x) \stackrel{\in \pi_n}{\equiv} L_n(P; x) = \sum_{k=0}^n P(\eta_k) l_{kn}(x), \quad (2.7)$$

$$T_n(x) \stackrel{\in \pi_n}{\equiv} L_n(T_n; x) = \sum_{k=0}^n T_n(\eta_k) l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k l_{kn}(x). \quad (2.8)$$

- Нека $x > 1$. Имаме



$$|P(x)| \stackrel{(2.7)}{=} \left| \sum_{k=0}^n P(\eta_k) l_{kn}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^n |P(\eta_k) l_{kn}(x)| \stackrel{|P(\eta_k)| \leq 1}{\leq} \sum_{k=0}^n |l_{kn}(x)|. \quad (2.9)$$

Нашата цел е да ограничим последното отгоре от $T_n(x)$, затова ще намерим връзка между $|l_{kn}(x)|$ и $|T_n(x)|$. В случая, ще използваме, че $|l_{kn}(x)| = \text{sign}(l_{kn}(x)) l_{kn}(x)$. Знаем, че

$$l_{kn}(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - \eta_i}{\eta_k - \eta_i} = \frac{(x - \eta_0)(x - \eta_1) \dots (x - \eta_{k-1})(x - \eta_{k+1}) \dots (x - \eta_n)}{(\eta_k - \eta_0)(\eta_k - \eta_1) \dots (\eta_k - \eta_{k-1})(\eta_k - \eta_{k+1}) \dots (\eta_k - \eta_n)}.$$

За да определим знака му, ще използваме, че $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$ обхождат интервала $[-1, 1]$, започвайки от десния му край ($\eta_0 = 1, \dots, \eta_n = -1$), т.е. са подредени в низходящ ред и $\eta_0 > \eta_1 > \dots > \eta_n$. Имаме:

$$l_{kn}(x) = \frac{\overbrace{(x - \eta_0)}^{>0} \overbrace{(x - \eta_1)}^{>0} \dots \overbrace{(x - \eta_{k-1})}^{>0} \overbrace{(x - \eta_{k+1})}^{>0} \dots \overbrace{(x - \eta_n)}^{>0}}{\underbrace{(\eta_k - \eta_0)}_{<0} \underbrace{(\eta_k - \eta_1)}_{<0} \dots \underbrace{(\eta_k - \eta_{k-1})}_{<0} \underbrace{(\eta_k - \eta_{k+1})}_{>0} \dots \underbrace{(\eta_k - \eta_n)}_{>0}},$$

откъдето следва, че $|l_{kn}(x)| = (-1)^k l_{kn}(x)$. Заместваме в (2.9):

$$|P(x)| \leq \sum_{k=0}^n |l_{kn}(x)| = \sum_{k=0}^n (-1)^k l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^n T_n(\eta_k) l_{kn}(x) \stackrel{(2.8)}{=} T_n(x) = |T_n(x)|.$$

За последното равенство използвахме факта, че $|T_n(x)| = T_n(x)$, $x > 1$.

- Нека $x < -1$. Постъпваме аналогично.

$$|P(x)| \stackrel{(2.7)}{=} \left| \sum_{k=0}^n P(\eta_k) l_{kn}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^n |P(\eta_k) l_{kn}(x)| \stackrel{|P(\eta_k)| \leq 1}{\leq} \sum_{k=0}^n |l_{kn}(x)|.$$

Определяме знака на $l_{kn}(x)$:

$$l_{kn}(x) = \frac{\overbrace{(x - \eta_0)}^{<0} \overbrace{(x - \eta_1)}^{<0} \dots \overbrace{(x - \eta_{k-1})}^{<0} \overbrace{(x - \eta_{k+1})}^{<0} \dots \overbrace{(x - \eta_n)}^{<0}}{\underbrace{(\eta_k - \eta_0)}_{<0} \underbrace{(\eta_k - \eta_1)}_{<0} \dots \underbrace{(\eta_k - \eta_{k-1})}_{<0} \underbrace{(\eta_k - \eta_{k+1})}_{>0} \dots \underbrace{(\eta_k - \eta_n)}_{>0}}.$$

От последното следва, че

$$|l_{kn}(x)| = (-1)^{n+k} l_{kn}(x)$$

и следователно

$$|P(x)| \leq \sum_{k=0}^n |l_{kn}(x)| = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} l_{kn}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^n T_n(\eta_k) l_{kn}(x) \stackrel{(2.8)}{=} (-1)^n T_n(x) = |T_n(x)|.$$

Последното равенство следва от факта, че $T_n(x) > 0$ при n – четно и $T_n(x) < 0$ при n – нечетно за всяко $x < -1$.

- За $x = \pm 1$ ($\eta_0 = 1, \eta_n = -1$) твърдението е очевидно от условието за $|P(\eta_k)|$. Имаме

$$|P(\pm 1)| \leq 1, \quad |T_n(\pm 1)| = 1 \Rightarrow |P(\pm 1)| \leq |T_n(x)|.$$

□



Глава 3

Разделени разлики. Интерполационна формула на Нютон

Досега в упражненията разгледахме интерполационната задача на Лагранж – постановка, как да определим полинома, чиято графика минава през дадени точки, как да намерим оценка на грешката при това приближение и кои възли ни дават „най-добра“ такава оценка. Нека накратко припомним постановката на задачата. Търсим $p(x) \in \pi_n$ такъв, че $p(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$, където x_i са различни възли, а y_0, \dots, y_n са дадени стойности. Както казахме, полиномът на Лагранж може да бъде намерен като например:

- решим получената система за неизвестните коефициенти на полинома a_0, a_1, \dots, a_n .
- използваме интерполационната формула на Лагранж

$$p(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_{kn}(x),$$

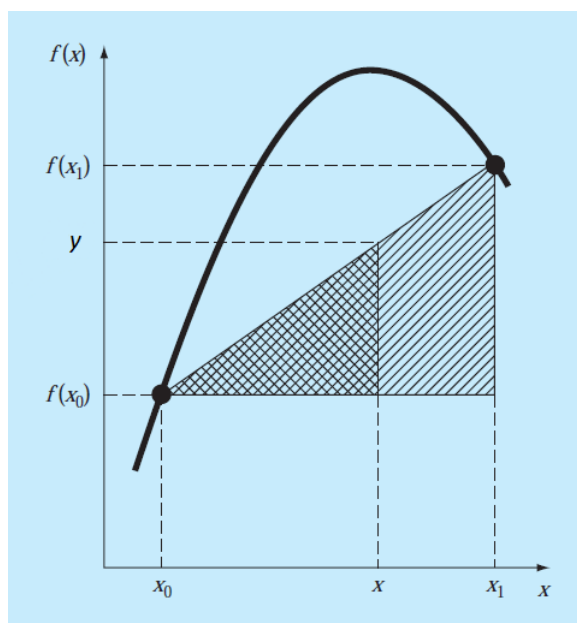
където $l_{kn}(x)$ са базисните полиноми на Лагранж.

В тази секция ще разгледаме още една формула, по която може да се намери интерполационният полином на Лагранж – известната формула на Нютон. Всъщност, исторически, Нютон първи е получил аналитична формула за намирането му. Да обърнем внимание, че аналитичните формули, по които може да се построи полиномът, са различни, но полученият полином е **един и същ** (той е и единствен).

И така, преди да дадем общата формула на Нютон за намиране на полинома от π_n , ще разгледаме задачата в случая, когато търсим линеен и квадратичен интерполационен полином.

1. Линеен полином

Нека в равнината са дадени точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) . Търсим полином от π_1 , чиято графика минава през точките:



Нека (x, y) е произволна точка в равнината, лежаща върху правата, съответстваща на графиката на полинома. Лесно се вижда (например използвайки подобни триъгълници или факта, че наклонът на правата е постоянен), че е в сила

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

От последното следва, че

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

т.е. това е уравнението на правата и следователно търсеният полином е

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Да обърнем внимание, че намерихме полинома във вида $p(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$, където $b_0 = f(x_0)$, $b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

2. Квадратична интерполация

Да намерим полинома от π_2 , който интерполира точките (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) . Последния ще търсим във вида

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1).$$

След известно пресмятане, като се използват условията за интерполация (тук няма да се спираме на извеждането), ще получим

$$b_0 = f(x_0), \quad b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}.$$



Следователно търсеният полином е

$$p(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{f[x_0, x_1]}(x - x_0) + \underbrace{\frac{\overbrace{f(x_2) - f(x_1)}^{f[x_1, x_2]} - \overbrace{f(x_1) - f(x_0)}^{f[x_0, x_1]}}{x_2 - x_1 - x_1 + x_0}}_{f[x_0, x_1, x_2]}(x - x_0)(x - x_1).$$

Можем да постъпим аналогично за определяне на полинома на Лагранж от n -та степен, който отново ще търсим във вида

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}).$$

Интересно

Причината да търсим полинома във вида

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

е следната. Както казахме, базисните полиноми на Лагранж имат стойност 1 само в един от възлите – този, за който отговарят. Във формулата на Нютон полиномът се търси като линейна комбинация на друг базис:

$$1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \dots, (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}).$$

Втората базисна функция се нулира в x_0 , следващата в x_0, x_1 и т.н. Благодарение на този избор за базис, интерполационните условия водят до система с триъгълна матрица. Както знаем, решаването на такава система е непосредствено.

Коефициентите b_0, b_1, \dots, b_n , които са решение на интерполационната задача, са така наречените разделени разлики.

Определение 2. Нека x_0, \dots, x_n са дадени различни точки. **Разделена разлика** от n -ти ред на функцията f в точките x_0, \dots, x_n ще бележим с $f[x_0, \dots, x_n]$ и дефинираме с рекурентната връзка

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

като $f[x_i] = f(x_i), \forall i$.

Нека пресметнем една примерна разделена разлика.

Задача 1. Да се намери $f[x_0, x_1, x_2]$, ако $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ и $f(x_0) = 0, f(x_1) = -1, f(x_2) = 1$.

Решение. От дефиницията следва, че

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$

Последното означава, че за да пресметнем разделената разлика от втори ред $f[x_0, x_1, x_2]$, трябва да пресметнем разделените разлики от първи $f[x_1, x_2]$ и $f[x_0, x_1]$. И така:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{-1 - 0}{1 - 0} = -1;$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-1)}{2 - 1} = 2.$$



Заместваме полученото във формулата за разделената разлика от втори ред:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{2 - (-1)}{2 - 0} = \frac{3}{2}.$$

□

Връзката между понятието разделена разлика и интерполационния полином на Лагранж се открива в следната теорема.

Теорема 3. Разделената разлика $f[x_0, \dots, x_n]$ съвпада с коефициента пред x^n в интерполационния полином на Лагранж $L_n(f; x)$ за функцията f с възли x_0, \dots, x_n .

Като се използва последната теорема, може да се изведе **формулата на Нютон** за интерполационния полином на Лагранж:

$$\begin{aligned} L_n(f; x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \\ &= f(x_0) + \sum_{k=1}^n f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) \end{aligned}$$

или записана еквивалентно

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}),$$

като допълнително приемем, че $(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) = 1$ при $k = 0$.

Задачата за намиране на интерполационния полином на Лагранж чрез формулата на Нютон се свежда до определянето на разделените разлики в горепосочената формула. Тъй като формулата е рекурсивна, на практика се използва следната, удобна за компютърна реализация, схема (например за възли x_0, x_1, x_2, x_3):

Възли	$f[\cdot]$	$f[\cdot, \cdot]$	$f[\cdot, \cdot, \cdot]$	$f[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$
x_0	$f[x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		

В горепосочената схема коефициентите във формулата на Нютон за интерполационния полином лежат най-отгоре на всеки стълб (отбелязани са в синьо). Ние ще използваме именно тази таблица за определянето на коефициентите в полинома. Нека сега приложим формулата на Нютон за конкретна задача.

Задача 2. Да се намери интерполационният полином на Лагранж във форма на Нютон, интерполиращ функцията $f(x) = \sqrt{x}$ в т. 0, 1, 4.

Решение. Да запишем първо интерполационните условия в таблица

x	0	1	4
y	0	1	2



Търсим полинома във вида

$$L_2(f; x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Да пресметнем разделените разлики, като попълним съответната таблица.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 0$	$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -\frac{1}{6}$
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 1$		
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 2$	$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{3}$	

Заместваем получените разделени разлики и получаваме

$$L_2(f; x) = 0 + 1(x - 0) - \frac{1}{6}(x - 0)(x - 1) = \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}x^2.$$

Проверете сами, че така полученият полином удовлетворява интерполационните условия! \square

Подробно решена примерна задача за намиране на интерполационен полином във форма на Нютон може да намерите и в това [видео](#).

Нека обърнем внимание на ползата от това да имаме различни формули за намирането на алгебричния полином и да разгледаме случаи, в които едната формула има предимство пред другата:

- Формула на Лагранж

Базисните полиноми на Лагранж зависят само от възлите на интерполация. Следователно, ако искаме да решим интерполационната задача с едни и същи възли, но различни съответстващи им стойности, можем да построим базисните полиноми само веднъж. Тогава в линейната комбинация на базисните полиноми ще променяме само коефициентите $f(x_i)$. В този случай е удобно да се използва формулата на Лагранж.

- Формула на Нютон

Ако искаме да построим редица от интерполационните полиноми $L_1(f; x), L_2(f; x), \dots$, както следва – $L_1(f; x)$ интерполира f в точките x_0, x_1 ; $L_2(f; x)$ интерполира f в точките x_0, x_1, x_2 и т.н., то е удобно да използваме формулата на Нютон. Тъй като за всеки нов полином добавяме по един възел, само ще трябва да допълним таблицата с разделени разлики и да прибавим съответния член към построения преди това полином. Ако сменим функционалните стойности обаче, ще трябва да пресметнем всички разделени разлики отначало!

Вече показахме как се намира интерполационният полином на Лагранж, като се използва формулата на Нютон. Сега ще се спрем на няколко интересни свойства на разделената разлика.



Свойство 1 В сила е следната формула за разделената разлика

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}, \quad (3.1)$$

за $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Доказателство. От дефиницията на разделена разлика става ясно, че всяка разделена разлика се представя като линейна комбинация на функционалните стойности на f в съответните възли. За да докажем горното твърждение, ще използваме, че разделената разлика от n -ти ред съвпада с коефициента пред x^n в полинома на Лагранж. Нека припомним и формулата на Лагранж, записана чрез $\omega(x)$:

$$\begin{aligned} L_n(f; x) &= \sum_{k=0}^n f(x_k) l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)} \\ &= \frac{f(x_0)}{\omega'(x_0)} \underbrace{\frac{\omega(x)}{(x - x_0)}}_{x^n + \dots} + \dots + \frac{f(x_n)}{\omega'(x_n)} \underbrace{\frac{\omega(x)}{(x - x_n)}}_{x^n + \dots}. \end{aligned}$$

От последната формула се вижда, че коефициентът пред x^n е точно $\sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$, откъдето следва исканото твърждение.

Получихме, че разделената разлика е линейна комбинация на $f(x_k)$ с коефициенти $\frac{1}{\omega'(x_k)}$ за съответните възли:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{1}{\omega'(x_0)} f(x_0) + \frac{1}{\omega'(x_1)} f(x_1) + \dots + \frac{1}{\omega'(x_n)} f(x_n). \quad (3.2)$$

□

Свойство 2 Разделената разлика не зависи от подредбата на възлите, т.е.

$$f[x_0, \dots, x_n] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}],$$

където i_0, i_1, \dots, i_n е произволна пермутация.

Доказателство. В общия случай на база само на рекурентната връзка това трудно може да се покаже, затова ще го покажем като използваме изведеното досега. Знаем, че интерполационният полином не зависи от подредбата на възлите, т.е. той е един и същ за различна тяхна пермутация. Тъй като разделената разлика от ред n съвпада с коефициента пред x^n в този полином, то, независимо от подредбата на x_0, \dots, x_n , тя ще бъде едно и също число.

Забележка: Друг начин да се докаже последното е като се използва фактът, че разделената разлика е линейна комбинация на функционалните стойности, вж. (3.2). Това означава, че дори и да разместим местата на възлите в разделената разлика, линейната комбинация ще се запази. □

Свойство 3 Разделената разлика е **линеен функционал**¹, т.е.

$$(f + cg)[x_0, \dots, x_n] = f[x_0, \dots, x_n] + cg[x_0, \dots, x_n],$$

¹Функционал е изображение, което приема функция и връща число. Пример за функционал е определеният интеграл. Линейният функционал F изпълнява условията $F(f + g) = F(f) + F(g)$ и $F(\lambda g) = \lambda F(g)$. Разделената разлика е функционал от вида $\sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$, където $A_k = \frac{1}{\omega'(x_k)}$.



където $c \in R$, а f и g са дадени функции.

Доказателство. За доказателството отново ще използваме (3.1), т.е. $f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$.

От последното имаме

$$\begin{aligned} (f + cg)[x_0, \dots, x_n] &= \sum_{k=0}^n \frac{(f(x) + cg(x))|_{x=x_k}}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k) + cg(x_k)}{\omega'(x_k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)} + c \sum_{k=0}^n \frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} = f[x_0, \dots, x_n] + cg[x_0, \dots, x_n]. \end{aligned}$$

□

Свойство 4 Ако $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \pi_n$, то $f[x_0, \dots, x_n] = a_n$;

Свойство 5 Ако $f \in \pi_{n-1}$, то $f[x_0, \dots, x_n] = 0$.

Нека сега приложим свойствата в няколко задачи.

Задача 3. Да се докаже, че $\sum_{k=0}^n \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 0$.

Доказателство. За доказателството ще използваме формула (3.1). След като я приложим за функцията $f(x) = \omega''(x)$, получаваме:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}.$$

Тъй като $f(x) = \omega''(x)$ е от степен $n - 1$ ($\omega(x)$ е от степен $n + 1$), то разделената разлика от n -ти ред е равна на 0, откъдето следва и исканото твърдение. □

Задача 4. Нека $x_k \neq 0, -1$ за $k = 1, \dots, n$. Докажете равенството

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^n f\left(\frac{1}{x_k}\right)}{f'(x_k)(1+x_k)} = (-1)^n (x_1 x_2 \dots x_n - 1),$$

където $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$.

Доказателство. Да разгледаме функцията $g(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$. Ще намерим разделената ѝ разлика от n -ти ред за възли $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$, като допълнително положим $x_{n+1} = -1$ (за разделената разлика от n -ти ред са ни необходим $n + 1$ възела). Да опростим $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^n \left(\frac{1}{x} - x_1\right) \left(\frac{1}{x} - x_2\right) \dots \left(\frac{1}{x} - x_n\right) = \cancel{x}^n \frac{(1 - x_1x)}{\cancel{x}} \frac{(1 - x_2x)}{\cancel{x}} \dots \frac{(1 - x_nx)}{\cancel{x}} \\ &= ((-1)^n x_1 \dots x_n) x^n + \dots \end{aligned}$$

Тъй като $g(x)$ е полином от n -та степен, то разделената разлика от n -ти ред ще съвпада със старшия му коефициент, т.е.

$$g[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] = (-1)^n x_1 \dots x_n. \tag{3.3}$$



Освен това от (3.1) знаем още, че за разделената разлика от n -ти ред е в сила следната формула

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} = g[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}], \quad (3.4)$$

където

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n+1}).$$

Последното е еквивалентно на

$$\sum_{k=1}^n \frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} + \frac{g(x_{n+1})}{\omega'(x_{n+1})} = g[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}].$$

Прехвърляйки от другата страна едното събираемо, получаваме

$$\sum_{k=1}^n \frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} = g[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] - \frac{g(x_{n+1})}{\omega'(x_{n+1})}. \quad (3.5)$$

Да уточним лявата и дясната страна на уравнение (3.5).

- За дясната страна имаме:

$$\begin{aligned} g[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] &= (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n \\ \frac{g(x_{n+1})}{\omega'(x_{n+1})} &= \frac{g(-1)}{\omega'(-1)} = \frac{(-1)^n (-1 - x_1)(-1 - x_2) \dots (-1 - x_n)}{(-1 - x_1)(-1 - x_2) \dots (-1 - x_n)} = (-1)^n. \end{aligned}$$

- За лявата страна на (3.5) имаме:

$$\begin{aligned} g(x_k) &= x_k^n f(x_k), \\ \omega'(x_k) &= \underbrace{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}_{f'(x_k)} (x_k - x_{n+1}) \\ &= f'(x_k) \underbrace{(x_k - x_{n+1})}_{=-1} = f'(x_k)(x_k + 1) \end{aligned}$$

Заместваме полученото за лявата и дясната страна в (3.5) и получаваме исканото твърдение. \square

Допълнителни задачи

Задача 5. Намерете интерполационния полином във форма на Нютон, който интерполира таблицата.

x	2.5	3	4	5
f	6	7	3	1

Задача 6. Дадени са времето t и разстоянието $x(t)$, изминато от ракетата, изстреляна от земята в момент $t = 0$:

t (s)	0	1	2	4
x (m)	0	20	60	320

Приложете интерполационната формула на Нютон, за да намерите функцията $x(t)$, описваща изминатия път на ракетата. Използвайте намерената функция, за да пресметнете приближено скоростта и ускорението на ракетата в момент $t = 3$ (използвайте съответно $x'(t)$ и $x''(t)$).

Задача 7. Като използвате свойствата на разделената разлика, докажете твърдеството

$$\sum_{k=0}^n \frac{x_k \omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = (n+1)n.$$



Глава 4

Крайни разлики

В предишното упражнение разгледахме една нова формула за намиране на интерполационния полином на Лагранж – формулата на Нютон. Полиномът във формата на Нютон има следния вид:

$$L_n(f; x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}).$$

Последният е линейна комбинация на базисните функции

$$1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \dots, (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}),$$

с коефициенти така наречените разделени разлики, които можем лесно да пресметнем, използвайки познатата ни схема:

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	
		$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$	
		$f[x_4, x_5] = \frac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

По дефиниция всяка разделена разлика от вида $f[x_i, \dots, x_j]$ съдържа в знаменателя си разликата $x_j - x_i$. Нека сега разгледаме случая, в който възлите x_i са **равноотдалечени**, т.е. всеки два последователни възела са на разстояние h (още ще го наричаме стъпка) един от друг. Имаме

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_2 + h = x_0 + 3h, \dots$$

или, иначе казано, възлите се задават по формулата

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В този случай знаменателите в разделените разлики от един и същи ред ще бъдат равни (съответно във всеки стълб от нашата таблица знаменателят ще е един и същ). Поради това, в случая на равноотдалечени възли, е удобно знаменателите да се пропуснат и може да се изведе подходяща формула за интерполационния полином на база на така наречените **крайни разлики**.

Определение 3. Нека е дадена крайна редица от числа f_0, f_1, f_2, \dots , които са стойности на функцията f в точките x_0, x_1, x_2, \dots . Крайна разлика от k -ти ред за функцията f в точката x_i ще бележим с $\Delta^k f_i$ и дефинираме рекурентно

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i, \quad k = 1, 2, \dots,$$

като $\Delta^0 f_i = f_i, \forall i$.

Оттук нататък, ако не са посочени изрично възлите x_0, \dots, x_n , ще приемаме, че те са $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ и т.н.

Задача 1. Дадена е редицата от стойности $f_0 = 1, f_1 = 3, f_2 = -1, f_3 = 7$. Намерете $\Delta^2 f_1$ и $\Delta^3 f_0$.

Решение. Да пресметнем двете крайни разлики поотделно. Използваме рекурентната връзка и заместваме, като всеки път понижаваме реда на крайната разлика:

$$\Delta^2 f_1 = \Delta^1 f_2 - \Delta^1 f_1 = (f_3 - f_2) - (f_2 - f_1) = f_3 - 2f_2 + f_1 = 7 + 2 + 3 = 12;$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 f_0 &= \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 = (\Delta^1 f_2 - \Delta^1 f_1) - (\Delta^1 f_1 - \Delta^1 f_0) = \Delta^1 f_2 - 2\Delta^1 f_1 + \Delta^1 f_0 \\ &= (f_3 - f_2) - 2(f_2 - f_1) + (f_1 - f_0) = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0 \\ &= 7 + 3 + 9 - 1 = 18. \end{aligned}$$

За пресмятането на крайните разлики можем да използваме познатата ни, но модифицирана таблица:

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3
$x_0 = 0$	$\Delta^0 f_0 = f(x_0) = 1$			
$x_1 = 1$	$\Delta^0 f_1 = f(x_1) = 3$	$\Delta^1 f_0 = \Delta^0 f_1 - \Delta^0 f_0 = 2$	$\Delta^2 f_0 = \Delta^1 f_1 - \Delta^1 f_0 = -6$	$\Delta^3 f_0 = 18$
$x_2 = 2$	$\Delta^0 f_2 = f(x_2) = -1$	$\Delta^1 f_1 = \Delta^0 f_2 - \Delta^0 f_1 = -4$	$\Delta^2 f_1 = \Delta^1 f_2 - \Delta^1 f_1 = 12$	
$x_3 = 3$	$\Delta^0 f_3 = f(x_3) = 7$	$\Delta^1 f_2 = \Delta^0 f_3 - \Delta^0 f_2 = 8$		

□

Да обърнем внимание, че

- неслучайно със символа Δ се означава крайна разлика. На езика на математиката той често се използва като синоним на думата „изменение“;
- $\Delta^k f_i$ е линейна комбинация на стойностите $f_i, f_{i+1}, \dots, f_{i+k}$, т.е. линейна комбинация на f_i и следващите k на брой стойности на f . Можем да забележим, че коефициентите в линейната комбинация от предната задача са точно биномни коефициенти, т.е. коефициентите в развитието на Нютоновия бином, с редуващи се знаци. Например:

$$\begin{aligned} \Delta^3 f_0 &= 1f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0 = -f_0 + 3f_1 - 3f_2 + 1f_3 \\ &= -\binom{3}{0}f_0 + \binom{3}{1}f_1 - \binom{3}{2}f_2 + \binom{3}{3}f_3. \end{aligned}$$



За пресмятането на произволна крайна разлика от k -ти ред за функцията f може да се докаже по индукция, че са в сила следните две формули:

- За произволна точка x_i :

$$\Delta^k f_i = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f_{i+j};$$

- За начална точка x_0 :

$$\Delta^k f_0 = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f_j.$$

И така, крайните разлики от k -ти ред действително са линейна комбинация на функционалните стойности на f в началната точка и следващите k на брой точки с биномни коефициенти и редуващи се знаци.

Задача 2. Пресметнете крайните разлики в задача 1, като използвате аналитичната формула.

Дотук разгледахме как може аналитично да се пресметнат крайните разлики. Сега ще припомним една важна лема, доказана на лекции, която ни дава връзка между разделена и крайна разлика от k -ти ред. Нея ще използваме, за да изведем интерполационната формула за равноотдалечени възли.

Лема 1. Нека $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \dots, k$, и функцията $f(x)$ е определена в тези точки. Тогава

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}.$$

Доказателството на лемата е непосредствено, като се използва индукция по броя на точките.

Използвайки последната връзка, част от свойствата на разделената разлика се пренасят върху крайната:

Свойство 1 Крайната разлика е линеен функционал, т.е. $\Delta^n(f + cg)_i = \Delta^n f_i + c\Delta^n g_i$, където $c \in \mathbb{R}$, f, g – функции;

Свойство 2 Ако $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \pi_n$, то $\Delta^n f_0 = n!h^n f[x_0, \dots, x_n] = n!h^n a_n$;

Свойство 3 Ако $f \in \pi_{n-1}$, то $\Delta^n f_0 = 0$.

Да обобщим накратко казаното дотук:

- В случая на равноотдалечени възли, т.е. $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, \dots, n$, разделените разлики във формулата на Нютон имат един и същ знаменател. Въведохме понятието крайна разлика;
- Връзката между разделена и крайна разлика в случая на равноотдалечени възли се задава с тъждеството

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k};$$

- За крайната разлика от n -ти ред в т. x_0 е в сила аналитичната формула

$$\Delta^n f_0 = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_j.$$



Нека сега изведем формулата за интерполационния полином в случая на равноотдалечени възли. За да направим връзка между интерполационната формула и крайната разлика, ще заместим разделената разлика в интерполационния полином във форма на Нютон, с еквивалентния ѝ израз, който получихме:

$$\begin{aligned} L_n(f; x) &= \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k} (x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) \\ &= \Delta^0 f_0 + \Delta^1 f_0(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n} (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Нека сега заместим възлите по формулата $x_i = x_0 + ih$:

$$\begin{aligned} L_n(f; x) &= \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k} (x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k} (x - x_0)(x - x_0 - h)(x - x_0 - 2h) \dots (x - x_0 - (k-2)h)(x - x_0 - (k-1)h). \end{aligned}$$

В последното виждаме, че след заместването във всеки множител се повтаря изразът $x - x_0$. Последния ще положим да бъде равен на th , за да можем да изнесем коефициент h от всяка една от скобите в сумата. На практика извършваме смяната $x = x_0 + th$. Заместваме полагагането:

$$\begin{aligned} L_n(f; x_0 + th) &= \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k} (th)(th - h)(th - 2h) \dots (th - (k-2)h)(th - (k-1)h) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k} h^k t(t-1)(t-2) \dots (t-k+2)(t-k+1). \end{aligned}$$

И така, за полагагането $x - x_0 = th$ или еквивалентно $x = x_0 + th$, получихме

$$L_n(f; x) = L_n(f; x_0 + th) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f_0}{k!} t(t-1)(t-2) \dots (t-k+2)(t-k+1).$$

В литературата означението $\binom{t}{k}$ се среща при произволни реални стойности на параметъра t . С него се означава биномната функция, която се определя от равенството

$$\binom{t}{k} := \begin{cases} \frac{t(t-1) \dots (t-k+1)}{k!}, & k > 0, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

Неформално, можем да си мислим за горната формула като $\frac{t!}{k!(t-k)!}$. От последното следва, че интерполационният полином може да се запише като

$$L_n(f; x_0 + th) = \sum_{k=0}^n \Delta^k f_0 \binom{t}{k}.$$

Последната формула се нарича **формула на Нютон за интерполиране напред**. Коефициентите във формулата на Нютон за интерполиране напред лежат отново най-отгоре на всеки стълб в познатата ни вече таблица с крайни разлики за пресмятане на коефициентите.



Направената смяна $x = x_0 + th$ всъщност трансформира възлите $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ в редицата $0, 1, \dots, n$. Проверете сами!

По подобен начин може да се изведе и формулата за интерполиране назад (вж. лекции). Тя се извежда, като се използва формулата на Нютон, приложена за възлите $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0$ (взети в тази последователност), т.е.

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}](x - x_n) \dots (x - x_{n-k+1}).$$

След аналогична смяна $x = x_n + th$ се получава **формулата на Нютон за интерполиране назад**

$$L_n(f; x_n + th) = \sum_{k=0}^n \Delta^k f_{n-k} \binom{t+k-1}{k}.$$

За намирането на полинома по горната формула се използва същата таблица с крайни разлики, като коефициентите се намират на последния ред във всеки един от нейните стълбове.

Нека сега използваме горната формула, за да определим интерполационния полином за дадени равноотдалечени възли и стойности.

Задача 3. Постройте интерполационния полином за таблицата

x	0	1	2	3
f	-4	-3	2	11

като използвате формулата на Нютон за интерполиране напред. Да се изрази полиномът като функция на x .

Решение. Търсим полинома във вида

$$L_3(f; x_0 + th) = \sum_{k=0}^3 \Delta^k f_0 \binom{t}{k} = \Delta^0 f_0 \binom{t}{0} + \Delta^1 f_0 \binom{t}{1} + \Delta^2 f_0 \binom{t}{2} + \Delta^3 f_0 \binom{t}{3}.$$

Да обърнем внимание, че полиномът се представя по степените на независимата променлива t чрез полиномите

$$\binom{t}{0} = 1, \quad \binom{t}{1} = t, \quad \binom{t}{2} = \frac{t(t-1)}{2!}, \quad \binom{t}{3} = \frac{t(t-1)(t-2)}{3!},$$

т.е. търсеният полином е от π_3 . Да построим таблицата с крайни разлики.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3
$x_0 = 0$	$\Delta^0 f_0 = -4$			
$x_1 = 1$	$\Delta^0 f_1 = -3$	$\Delta^1 f_0 = -3 - (-4) = 1$		
$x_2 = 2$	$\Delta^0 f_2 = 2$	$\Delta^1 f_1 = 2 - (-3) = 5$	$\Delta^2 f_0 = 5 - 1 = 4$	
$x_3 = 3$	$\Delta^0 f_3 = 11$	$\Delta^1 f_2 = 11 - 2 = 9$	$\Delta^2 f_1 = 9 - 5 = 4$	$\Delta^3 f_0 = 4 - 4 = 0$



Заместваме полученото в интерполационната формула:

$$L_3(f; x_0 + th) = -4 + 1t + 4 \frac{t(t-1)}{2} + 0 \frac{t(t-1)(t-2)}{6} = 2t^2 - t - 4.$$

За променливата t имаме $t = \frac{x - x_0}{h}$. Заместваме $x_0 = 0, h = 1$ във формулата за t и получаваме $x = x_0 + th = t$. Следователно полиномът като функция на x е

$$L_3(f; x) = 2x^2 - x - 4.$$

□

Задача 4. Решете задача 2, като използвате формулата на Нютон за интерполиране назад.

Решение. За решението на задачата ще използваме коефициентите от схемата с крайните разлики, получена при интерполиране напред от предходната задача. Имаме

$$\begin{aligned} L_3(f; x_3 + th) &= \sum_{k=0}^3 \Delta^k f_{3-k} \binom{t+k-1}{k} = \Delta^0 f_3 \binom{t-1}{0} + \Delta^1 f_2 \binom{t}{1} + \Delta^2 f_1 \binom{t+1}{2} + \Delta^3 f_0 \binom{t+2}{3} \\ &= 11 + 9t + 4 \frac{(t+1)t}{2} + 0 \frac{(t+2)(t+1)t}{6} = 2t^2 + 11t + 11. \end{aligned}$$

Нека сега направим смяна към x . Имаме $x = x_3 + th, x_3 = 3, h = 1$, откъдето $t = x - 3$. Следователно полиномът е

$$L_3(f; x) = 2(x-3)^2 + 11(x-3) + 11 = 2x^2 - x - 4.$$

□

Разбира се, всички разглеждани до момента формули намират един и същи полином, ако им зададем конкретни възли и стойности. Разликата между формулите за интерполиране напред и интерполиране назад обаче се вижда в следния случай. Нека са ни дадени например 50 равноотдалечени възела x_0, \dots, x_{49} и съответстващи стойности на дадена функция f в тези точки. Нека построим редица от интерполационни полиноми по формулата за интерполиране напред. Тогава полиномът от първа степен ще интерполира f в точките x_0, x_1 ; полиномът от втора степен – в точките x_0, x_1, x_2 и т.н. Ако използваме формулата за интерполиране назад, полиномът от първа степен ще използва възли x_n, x_{n-1} ; полиномът от втора – възлите x_n, x_{n-1}, x_{n-2} и т.н.

Ако искаме да пресметнем приближено стойността на f в дадена точка, често на практика се подхожда по следния начин. Построява се редица от интерполационни полиноми докато разликата на две съседни приближения стане достатъчно близка, т.е. по-малка от предварително зададен толеранс на грешката. Тогава можем да считаме, че сме намерили стойността с такава точност. Вземайки предвид казаното по-горе е ясно, че ако търсим стойността на f в точка близка до началото на интервала, за предпочитане е да използваме формулата с разлика напред и обратно, ако искаме да намерим стойността на f в точка близка до края на интервала – да използваме формулата с разлика назад.

Да отбележим отново, че формулите с крайни разлики имат следното предимство в сравнение с формулата с разделени разлики – за пресмятането на крайните разлики не се налага да се извършва деление, което е относително бавна и неточна операция в компютъра. Разбира се, недостатък е, че формулите са приложими само за равноотдалечени възли.



Сега ще разгледаме едно интересно приложение на крайните разлики. Ако крайните разлики например от втори ред се нулират, то тогава точките от интерполационната ни таблица ще лежат върху права (коэффициентите пред втората и по-високите степени в интерполационния полином ще бъдат нули). Аналогично и за крайните разлики от произволен ред нататък. Нека решим подобен пример.

Задача 5. Като използвате крайни разлики, покажете, че точките лежат върху парабола:

x	0	1	2	3	4	5
y	-3	0	5	12	21	32

Решение. Ще покажем, че всички точки лежат на една парабола, като проверим, че всички крайни разлики от трети ред са 0 (следователно и тези от четвърти и пети ред). Това ще означава, че в интерполационния полином коэффициентите пред базисните полиноми от трета, четвърта и пета степен, $\binom{t}{3}$, $\binom{t}{4}$ и $\binom{t}{5}$, са равни на нула и той наистина е от втора степен.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3
0	$\Delta^0 f_0 = -3$			
1	$\Delta^0 f_1 = 0$	$0 - (-3) = 3$	$5 - 3 = 2$	
2	$\Delta^0 f_2 = 5$	$5 - 0 = 5$	$7 - 5 = 2$	0
3	$\Delta^0 f_3 = 12$	$12 - 5 = 7$	$9 - 7 = 2$	0
4	$\Delta^0 f_4 = 21$	$21 - 12 = 9$	$11 - 9 = 2$	0
5	$\Delta^0 f_5 = 32$	$32 - 21 = 11$		

□

Задача 6. Нека $S_k = 1^2 + \dots + k^2$, $k \geq 1$, където $S_0 = 0$. Покажете, че съществува единствен полином $p \in \pi_3$, който интерполира точките S_k , т.е. $p(k) = S_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Намерете S_k , като използвате формулата на Нютон с крайни разлики за интерполиране напред.

Решение. Разглеждаме редицата от числа $S_0, S_1, \dots, S_m, \dots$. Нека определим полинома, който интерполира стойностите $S_0, S_1, S_2, S_3, \dots, S_m$, $m \geq 4$. Знаем, че съществува единствен полином $p(t) \in \pi_m$, за който $p(0) = S_0, p(1) = S_1, p(2) = S_2, \dots, p(m) = S_m$. От формулата на Нютон с крайни разлики за интерполиране напред имаме

$$p(t) = \sum_{k=0}^m \Delta^k S_0 \binom{t}{k}.$$

Ще пресметнем последователно крайните разлики в произволна точка i и ще покажем, че тези от четвърти ред са 0. И така:

$$\begin{aligned} \Delta^1 S_i &= \Delta^0 S_{i+1} - \Delta^0 S_i = S_{i+1} - S_i = (i+1)^2, \\ \Delta^2 S_i &= \Delta^1 S_{i+1} - \Delta^1 S_i = (i+2)^2 - (i+1)^2 = 2i+3, \\ \Delta^3 S_i &= \Delta^2 S_{i+1} - \Delta^2 S_i = (2(i+1)+3) - (2i+3) = 2, \\ \Delta^4 S_i &= \Delta^3 S_{i+1} - \Delta^3 S_i = 2 - 2 = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{4.1}$$



От последното следва, че и крайните разлики от четвърти, пети и по-висок ред във формулата на Нютон с крайни разлики за интерполиране напред, взети в точката $x_0 = 0$, ще са равни на 0. Заместваме:

$$p(t) = \sum_{k=0}^m \Delta^k S_0 \binom{t}{k} = \sum_{k=0}^3 \Delta^k S_0 \binom{t}{k} = \Delta^0 S_0 + \Delta^1 S_0 t + \Delta^2 S_0 \frac{t(t-1)}{2!} + \Delta^3 S_0 \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}.$$

Заместваме $i = 0$ в (4.1) и определяме крайните разлики $\Delta^1 S_0 = 1$, $\Delta^2 S_0 = 3$, $\Delta^3 S_0 = 2$. Търсеният полином е

$$p(t) = t + 3 \frac{t(t-1)}{2} + 2 \frac{t(t-1)(t-2)}{6} = \frac{t(t+1)(2t+1)}{6}.$$

Тъй като $p(k) = S_k$, то

$$S_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

□

Допълнителни задачи

Задача 7. Като използвате формулата на Нютон за интерполиране напред, намерете полинома, който интерполира таблицата.

(а)

x	1	2	3	4	5
y	1	2	6	24	120

(б)

x	2	3	4	5	6
y	3	4.28	5.88	7.80	10.04

Задача 8. Определете стойността на $\sin 52^\circ$, като построите интерполационния полином за таблицата

α°	45	50	55	60
$\sin \alpha$	0.7071	0.7660	0.8192	0.8660

и използвате формулата на Нютон за интерполиране напред.

Задача 9. Като използвате крайни разлики, определете степента на полинома, интерполиращ таблицата.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0	-4	0	6	8	0	-24

Задача 10. Нека $S_k = 1^3 + 2^3 + \dots + k^3$, $k \geq 1$, където $S_0 = 0$. Покажете, че съществува единствен полином $p \in \pi_4$, който интерполира точките S_k , т.е. $p(k) = S_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Намерете S_k , като използвате формулата на Нютон с крайни разлики за интерполиране напред.

Задача 11. Нека $S_k = 1^2 + 3^2 + \dots + (2k-1)^2$, $k \geq 1$, където $S_0 = 0$. Покажете, че съществува единствен полином $p \in \pi_3$, който интерполира точките S_k , т.е. $p(k) = S_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Намерете S_k , като използвате формулата на Нютон с крайни разлики за интерполиране напред.



Глава 5

Интерполационна задача на Ермит. Разделени разлики с кратни възли

Дотук разгледахме задачата на Лагранж, при която по дадена таблица от стойности намерихме алгебричен полином от π_n , чиято графика минава през съответните точки. В практиката често възникват задачи за приближаване на дадена функция f по зададени условия (информация за стойностите на функцията и нейните производни в дадени точки). Например интересен пример е полиномът на Тейлър, $T_n(x)$, който приближава (апроксимира) дадена функция, като използва една централна точка a , в която знаем стойността на функцията f и нейните производни:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Да забележим, че $T_n(a) = f(a)$, $T'_n(a) = f'(a)$, \dots , $T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$. Последното означава, че полиномът на Тейлър интерполира функцията заедно с производните ѝ до n -ти ред, включително, взети в точката a .

Бихме могли да си зададем следния въпрос. Можем ли за произволна таблица от $n+1$ стойности на функция f и нейни производни от произволен ред да построим единствен полином от степен, ненадминаваща n ? Въпросът какви условия трябва да изпълнява таблицата от стойности, за да се определи единственият полином, който я интерполира, все още няма отговор. Съществуват, разбира се, частни случаи, за които единственост на решението е доказана. Най-важният в практиката случай (след задачата на Лагранж) е задачата на Ермит.

Постановка на интерполационната задача на Ермит. Нека са дадени $n+1$ различни точки t_0, \dots, t_n , съответни на тях цели положителни числа ν_0, \dots, ν_n (още се наричат кратности) и таблица от стойности на функцията f и нейните производни

$$\begin{aligned} t_0 : & f(t_0), f'(t_0), \dots, f^{(\nu_0-1)}(t_0), \\ t_1 : & f(t_1), f'(t_1), \dots, f^{(\nu_1-1)}(t_1), \\ & \vdots \\ t_n : & f(t_n), f'(t_n), \dots, f^{(\nu_n-1)}(t_n). \end{aligned}$$

Да се намери полином, който интерполира функцията f и съответните ѝ производни във възлите t_0, \dots, t_n . □

Обърнете внимание, че при постановката на Ермит кратността ν_0 отговаря за броя на условията за функцията в т. t_0 (възелът t_0 е с кратност ν_0); кратността ν_1 – за броя на условията в т. t_1 и т.н. Нещо повече, условията за реда на производните са в непрекъснат ред (например за т. t_0 производните са до ред $\nu_0 - 1$, включително, без да се пропуска условие в предходните производни).

Да отбележим, че интерполирането на производните позволява по-добре да се контролира поведението на търсения интерполационен полином, например да има същата кривина като оригиналната функция и др.

Както виждаме, в постановката на Ермит имаме общо $\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_n$ интерполационни условия. Нека въведем означението $N = \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_n - 1$. Тогава задачата на Ермит може да се обобщи така – да се намери полиномът $p \in \pi_N$, който удовлетворява условията

$$p^{(\lambda)}(t_k) = f^{(\lambda)}(t_k), \quad k = 0, \dots, n, \quad \lambda = 0, \dots, \nu_k - 1.$$

Забележка: Когато интерполираме произволни стойности, а не стойности на функция, използваме означението $y_{k\lambda} = f^{(\lambda)}(t_k)$, т.е. търси се полином $p(x)$, който удовлетворява

$$p^{(\lambda)}(t_k) = y_{k\lambda}.$$

Може да се докаже (вж. лекции), че задачата на Ермит има единствено решение и е в сила следната теорема.

Теорема 4. При всеки избор на интерполационните възли $\{t_k\}_0^n$ ($t_i \neq t_j$ при $i \neq j$) и при всяка таблица от стойности $\{y_{k\lambda}\}$ интерполационната задача на Ермит има единствено решение.

Интересно

Полиномът на Ермит се означава с $H_N(f; x)$ в чест на Чарлз Ермит (Charles Hermite). Ермит (1822-1901) има значителни открития в областта на комплексния анализ, в частност теория на уравненията. Един от неговите приноси в областта на математиката е, че през 1873 г. е доказал, че числото e е трансцендентно, т.е. че не е корен на нито едно алгебрично уравнение с цели коефициенти. Вследствие на това, през 1882 г. същото е доказано и за числото π .

Нека сега се спрем на въпроса за построяването на решението на интерполационната задача. Както при тази на Лагранж, решението на задачата на Ермит може да бъде намерено по различни начини. Съществува аналогична формула на тази на Лагранж, както и обобщение на формулата на Нютон с разделени разлики, които ще разгледаме последователно.

Разделени разлики с кратни възли. Интерполационна формула във вид на Нютон

Оказва се, че можем да използваме обобщение на формулата на Нютон и за намиране на полинома на Ермит. В предишното упражнение въведохме понятието разделена разлика, като приехме, че точките са различни. При задачата на Ермит във всяка точка можем да налагаме по няколко условия. Оттук нататък ще приемаме, че ако напишем възлите x_0, x_0, x_1, x_1, x_1 , то ще сме наложили условия за функцията и производната ѝ в x_0 (който е двукратен възел), функцията и първите две производни в x_1 (който е трикратен).



Искаме да обобщим понятието разделена разлика така, че да можем да го свържем с понятието производна. Нека дадем прост пример, като разгледаме производната от първи ред. Имаме

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f[x, x_0] = f[x_0, x_0].$$

Ще постъпим аналогично, като разширим понятието разделена разлика по следния начин.

Определение 4. Нека f има непрекъснати производни до ред k включително в $[a, b]$. Разделена разлика от ред k за възлите $x_0 \leq \dots \leq x_n$ от $[a, b]$ дефинираме рекурентно

$$f[x_0, \dots, x_k] = \begin{cases} \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, & \text{ако } x_0 < x_k, \\ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & \text{ако } x_0 = x_k. \end{cases}$$

Вече сме готови да се върнем на построяването на интерполационния полином. Нека са дадени възли $t_0 < \dots < t_n$ и техни кратности ν_0, \dots, ν_n , заедно със стойността на функцията и съответните ѝ производни във всеки от тях. Нека $N + 1$ е общият брой на интерполационни условия, т.е. $N = \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_n - 1$. Нека още означим

$$(x_0, x_1, \dots, x_N) = (\underbrace{t_0, \dots, t_0}_{\nu_0}, \underbrace{t_1, \dots, t_1}_{\nu_1}, \dots, \underbrace{t_n, \dots, t_n}_{\nu_n}).$$

Да обърнем внимание, че от последното следва, че $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N$.

Теорема 5. За полинома на Ермит е в сила формулата

$$H_N(f; x) = \sum_{k=0}^N f[x_0, \dots, x_k] (x - x_0) \dots (x - x_{k-1}).$$

С други думи, ако искаме да определим полинома на Ермит, ще използваме познатата ни формула на Нютон, като единствената разлика е в това, че сме обобщили понятието разделена разлика. Оказва се, че, така обобщена, тя е точно коефициентът пред x^N в съответния полином на Ермит. Да построим такъв полином.

Задача 1. Като използвате интерполационната формула на Нютон с разделени разлики с кратни възли, намерете интерполационния полином на Ермит, който удовлетворява условията

$$p(0) = -1, \quad p'(0) = 1, \quad p''(0) = 2, \quad p(1) = 0, \quad p'(1) = -1.$$

Представете полинома по степените на x .

Решение. Искаме да интерполираме таблицата

$x_0 = 0$	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = 1$	$x_4 = 1$
$f(0) = -1$	$f'(0) = 1$	$f''(0) = 2$	$f(1) = 0$	$f'(1) = -1$

В условието на задачата са ни дадени пет интерполационни условия, следователно търсим полинома $H_4(f; x) \in \pi_4$ с явен вид

$$H_4(f; x) = f[0] + f[0, 0](x - 0) + f[0, 0, 0](x - 0)(x - 0) + f[0, 0, 0, 1](x - 0)^3 + f[0, 0, 0, 1, 1](x - 0)^3(x - 1).$$

Ще използваме познатата ни схема. За улеснение ще слагаме звезда на тези разделени разлики, които включват само кратни възли.



Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3	Ред 4
$x_0 = 0$	$f[x_0] = -1$				
$x_1 = 0$	$f[x_1] = -1$	$f[x_0, x_1]^* = 1$			
$x_2 = 0$	$f[x_2] = -1$	$f[x_1, x_2]^* = 1$	$f[x_0, x_1, x_2]^* = 1$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -1$	
$x_3 = 1$	$f[x_3] = 0$	$f[x_2, x_3] = 1$	$f[x_1, x_2, x_3] = 0$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = -2$	$f[x_0, \dots, x_4] = -1$
$x_4 = 1$	$f[x_4] = 0$	$f[x_3, x_4]^* = -1$	$f[x_2, x_3, x_4] = -2$		

- Разделени разлики от първи ред:

$$\begin{aligned}
 f[x_0, x_1]^* &= \frac{f'(x_0)}{1!} = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1!} = 1; & f[x_1, x_2]^* &= \frac{f'(x_1)}{1!} = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1!} = 1; \\
 f[x_2, x_3] &= \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = 1; & f[x_3, x_4]^* &= \frac{f'(x_3)}{1!} = \frac{f'(1)}{1!} = \frac{-1}{1!} = -1.
 \end{aligned}$$

- Разделени разлики от втори ред:

$$\begin{aligned}
 f[x_0, x_1, x_2]^* &= \frac{f''(x_0)}{2!} = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{2}{2!} = 1; & f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = 0; \\
 f[x_2, x_3, x_4] &= \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2} = \frac{-1 - 1}{1 - 0} = -2.
 \end{aligned}$$

- Разделени разлики от 3 и 4-ти ред:

$$\begin{aligned}
 f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{0 - 1}{1} = -1; \\
 f[x_1, x_2, x_3, x_4] &= \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1} = \frac{-2 - 0}{1} = -2; \\
 f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0} = \frac{-2 - (-1)}{1 - 0} = -1.
 \end{aligned}$$

Остава да заместим получените разделени разлики във формулата за полинома на Ермит:

$$\begin{aligned}
 H_4(f; x) &= -1 + 1(x - 0) + 1(x - 0)^2 - 1(x - 0)^3 - 1(x - 0)^3(x - 1) \\
 &= -1 + x + x^2 - x^3 - x^4 + x^3 = -x^4 + x^2 + x - 1.
 \end{aligned}$$

□

Забележка: Важно е да отбележим, че интерполационната задача на Ермит включва условия за функцията и производните ѝ, като те се взимат в последователен ред. Така например, ако сменим условието на горната задача на

$$p(0) = -1, \quad p''(0) = 2, \quad p(1) = 0, \quad p'(1) = -1,$$

то задачата вече не е интерполационна задача на Ермит, защото липсва условие за $p'(0)$. В общия случай не можем да твърдим съществуване и единственост на решението.



Интерполационна формула във вид на Лагранж

Ще разгледаме формулата в един частен случай, при който $\nu_0 = \nu_1 = \dots = \nu_n = 2$. Да припомним задачата. Нека са дадени възли x_0, x_1, \dots, x_n . Търсим полинома на Ермит от степен $2n + 1$ (за всеки възел имаме 2 условия – за стойността на функцията и първата ѝ производна, откъдето имаме общо $2(n + 1)$ условия), който интерполира функцията и нейната производна във всяка от точките x_0, \dots, x_n . За целта да означим:

- стойността на функцията f в т. x_k с y_k ;
- стойността на производната на f в т. x_k с y'_k ;

Теорема 6. Нека x_0, \dots, x_n са произволни различни точки от реалната права. Тогава при всеки избор на числата y_0, \dots, y_n и y'_0, \dots, y'_n полиномът

$$p(x) = \sum_{k=0}^n y_k \left\{ 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k) \right\} \left(\frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} \right)^2 + \sum_{k=0}^n y'_k \left\{ \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} \right\}^2 (x - x_k)$$

е от степен, ненадминаваща $2n + 1$, и удовлетворява условията

$$p(x_k) = y_k, \quad p'(x_k) = y'_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Идея на доказателството. Аналогично на задачата на Лагранж, полиномът се търси във вида

$$p(x) = \sum_{k=0}^n (y_k H_{k0}(x) + y'_k H_{k1}(x)),$$

където $H_{k0}, H_{k1} \in \pi_{2n+1}$ са базисните полиноми, удовлетворяващи интерполационните условия:

$$\begin{aligned} H_{k0}(x_i) &= \delta_{ki}, & H'_{k0}(x_i) &= 0, \\ H_{k1}(x_i) &= 0, & H'_{k1}(x_i) &= \delta_{ki}, \end{aligned}$$

$k = 0, \dots, n, i = 0, \dots, n$. Символът δ_{ki} е познатият ни символ на Кронекер

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq i, \\ 1, & \text{при } k = i. \end{cases}$$

С други думи, за всеки възел x_k отговарят два базисни полинома – H_{k0} за интерполационните условия за стойностите на функцията и H_{k1} за интерполационните условия за стойностите на производната ѝ. Аналитичният вид на базисните полиноми се намира от интерполационните условия, които изпълняват, като получаваме

$$\begin{aligned} H_{k0}(x) &= \left\{ 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k) \right\} \underbrace{\left(\frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} \right)^2}_{l_{kn}^2(x)} = \left\{ 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k) \right\} l_{kn}^2(x); \\ H_{k1}(x) &= \left\{ \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} \right\}^2 (x - x_k) = l_{kn}^2(x)(x - x_k). \end{aligned}$$

□

В общия случай извеждането на явния вид на полинома е доста трудоемко, затова няма да се спираме на него тук. Сега ще разгледаме една задача, тясно свързана с горната теорема.



Задача 2. Нека $l_{kn}(x)$, $k = \overline{0, n}$, са базисните полиноми на Лагранж, съответни на възлите x_0, \dots, x_n , и

$$\varphi_k(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right) l_{kn}^2(x).$$

Докажете, че

$$\varphi'_k(x_k) = 0, k = \overline{0, n}.$$

Доказателство. Преди да докажем твърдението от условието на задачата, да обърнем внимание, че това е базисният полином $H_{k0}(x)$, който отговаря за интерполационното условие за стойността на полинома във възела x_k . За него искаме да покажем, че производната му се нулира в този възел, което от своя страна ще позволи стойността на производната на полинома $p(x)$ в тази точка да се контролира от коефициента пред k -тата базисна функция $H_{k1}(x)$.

И така, имаме

$$\begin{aligned} \varphi'_k(x) &= \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right)' l_{kn}^2(x) + \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right) (l_{kn}^2(x))' \\ &= -\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} l_{kn}^2(x) + \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right) (2l_{kn}(x)l'_{kn}(x)). \end{aligned}$$

Искаме да пресметнем $\varphi'_k(x_k)$. Полагаме $x = x_k$ в горната функция, заместваем $l_{kn}(x_k) = 1$ и получаваме

$$\varphi'_k(x_k) = -\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} + 2l'_{kn}(x_k). \quad (5.1)$$

Остава да пресметнем производната на базисния полином на Лагранж в точката x_k . За тази цел ще използваме представянето му

$$l_{kn}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}.$$

Да пресметнем производната на последното.

$$\begin{aligned} l'_{kn}(x) &= \frac{1}{\omega'(x_k)} \left(\frac{\omega(x)}{x - x_k}\right)' \\ \Rightarrow l'_{kn}(x_k) &= \frac{1}{\omega'(x_k)} \left(\frac{\omega(x)}{x - x_k}\right)' \Big|_{x=x_k} = \frac{1}{\omega'(x_k)} \left(\frac{\omega'(x)(x - x_k) - \omega(x) \cdot 1}{(x - x_k)^2}\right) \Big|_{x=x_k} \end{aligned}$$

Формално горният израз не е дефиниран (ако заместим с $x = x_k$, ще получим частно $0/0$), той трябва да се интерпретира като граница при $x \rightarrow x_k$, т.е.

$$l'_{kn}(x_k) = \lim_{x \rightarrow x_k} l'_{kn}(x) = \lim_{x \rightarrow x_k} \left(\frac{\omega'(x)(x - x_k) - \omega(x)}{(x - x_k)^2}\right).$$

Имаме

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega'(x)(x - x_k) - \omega(x)}{(x - x_k)^2}\right) \Big|_{x=x_k} &= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\omega'(x)(x - x_k) - \omega(x)}{(x - x_k)^2} \\ &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\omega''(x)(x - x_k) + \omega'(x) - \omega'(x)}{2(x - x_k)} = \frac{\omega''(x_k)}{2}. \end{aligned}$$



От последното следва, че за базисния полином на Лагранж е в сила $l'_{kn}(x_k) = \frac{\omega''(x_k)}{2\omega'(x_k)}$. Заместваме полученото в (5.1) и получаваме търсеното равенство. \square

Теорема за оценка на грешката

Оказва се, че за задачата на Ермит също може да се даде оценка на грешката, която правим при приближение $f(x) \approx H_N(f; x)$.

Теорема 7. Нека $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ са дадени възли, $\{\nu_k\}_0^n$ са произволни цели положителни числа (техни кратности) и функцията f има непрекъснатата $(N + 1)$ -ва производна в $[a, b]$, където $N = \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_n - 1$. Тогава за всяко $x \in [a, b]$, съществува число $\xi \in [a, b]$ такава, че

$$f(x) - H_N(f; x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N + 1)!} (x - x_0)^{\nu_0} \dots (x - x_n)^{\nu_n}.$$

Задача 3. Нека $f(x) = e^x$ и $H_3(f; x)$ интерполира f в точките 0 и 1 с кратност 2. Като използвате теоремата за оценка на грешката, покажете, че е в сила

$$|f(x) - H_3(f; x)| < \frac{1}{2^7}.$$

Допълнителни задачи

Задача 4. Като използвате интерполационната формула на Нютон с разделени разлики с кратни възли, намерете интерполационния полином на Ермит, който удовлетворява интерполационните условия. Представете $p(x)$ по степените на x .

(а) $p(0) = -1, p'(0) = 2, p''(0) = 0, p(1) = 3;$

(б) $p(0) = -4, p(1) = -1, p'(1) = 4, p''(1) = 4, p(2) = 6.$

Задача 5. Намерете интерполационния полином, който удовлетворява интерполационните условия:

(а)

x	-1	2
$f(x)$	-2	1
$f'(x)$	7	4

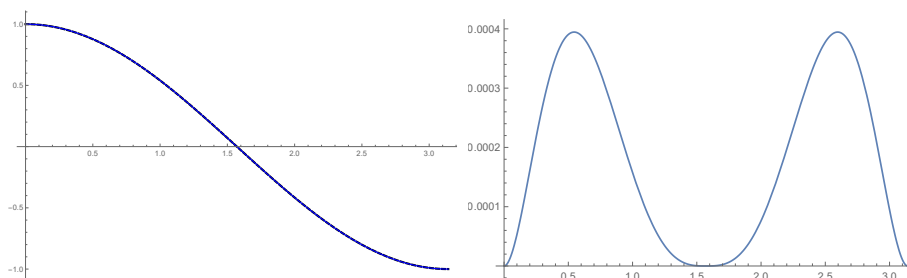
(б) $p(-1) = -2, p'(-1) = 7, p(2) = 1.$

Задача 6. Намерете полинома на Ермит за таблицата:

0	0	0	1	2
-1	0	0	0	7

Задача 7. Нека $f(x) = \cos x$ и $H_5(f; x)$ интерполира f в точките $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ с кратност равна на 2. Дайте оценка на грешката.

Забележка: На фигурата вляво може да видите графиките на $f(x) = \cos x$ (с черен пунктир) и на полинома $H_5(f; x)$ (в синьо), построени в една координатна система, а вдясно – графиката на грешката $|f(x) - H_5(f; x)|$.



От графиката на грешката се вижда, че в действителност тя не надминава 0.0004. А вие каква оценка на грешката получихте?



Глава 6

Системи на Чебишов. Интерполиране с тригонометрични полиноми

6.1 Системи на Чебишов

Дотук разгледахме задачата за приближаване на функция с алгебричен полином, който я интерполира в краен брой точки, т.е. търсихме функция от вида

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x), \quad (6.1)$$

където $\varphi_i(x), i = \overline{0, n}$, образуват базис на пространството π_n . Да обърнем внимание, че освен стандартния базис $1, x, x^2, \dots, x^n$, ние използвахме Лагранжевия базис $l_0(x), \dots, l_n(x)$ и Нютоновия базис $1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$. Тези базиси ни помагат лесно да определим неизвестните коефициенти в полинома. Естествено е изборът на функцията, с която апроксимираме, да зависи от процеса, който искаме да опишем. Например, ако имаме експериментални данни за някакъв периодичен процес, бихме искали да моделираме процеса с периодична функция; растежът на микроорганизми често има експоненциален характер и т.н.

И така, ако искаме да определим подходящо приближение на дадена функция (в нашия случай чрез интерполация), в зависимост от процеса може да се наложи да работим с други базиси в някое друго крайномерно линейно пространство. Такива например са:

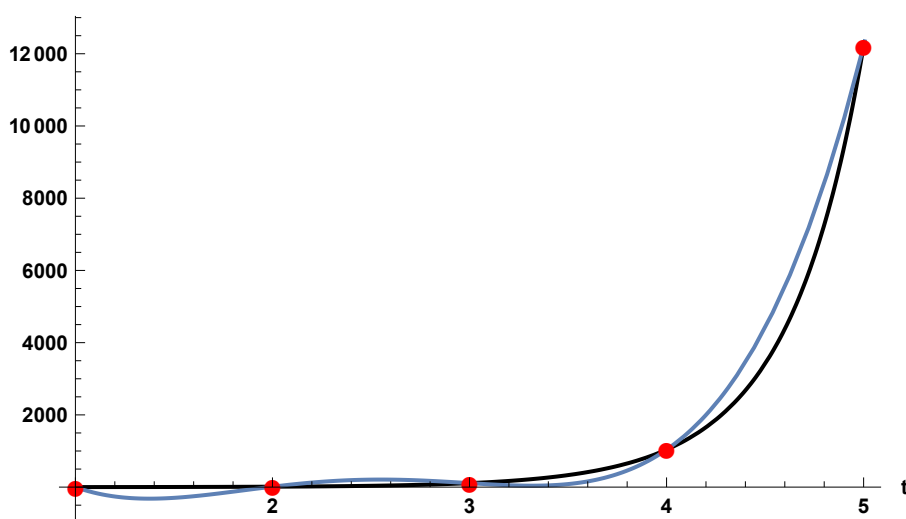
- Пространството от тригонометрични полиноми от ред n . Често използван базис на това пространство е

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx;$$

- Пространството от експоненциални полиноми. Примерен негов базис е

$$1, e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx}.$$

Едно от значенията на това по какъв базис се избира полиномът, който интерполира дадени данни (или функция) е илюстрирано със следващата графика. На Фиг. 6.1 в червено са дадени измервания за развитието на бактериална популация (време/брой клетки $\times 1000$), в синьо е построеният съответно алгебричен полином, а в черно – експоненциален полином по базиса $1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}$. От графиката можем да забележим, че в интервала $[1, 2]$ алгебричният полином има отрицателни стойности (което е недопустима стойност за брой клетки), докато експоненциалният полином е положителен за всяко x в интервала на интерполация. Експоненциалният полином описва добре и монотонния растеж на данните. Това е именно причината в този случай да е по-подходящо да се използва експоненциален базис.



Фигура 6.1: Приближаване на данни за бактериален растеж с алгебричен полином (в синьо) и с експоненциален полином (в черно).

Обикновено, когато искаме да намерим някакво приближение, го търсим в **крайномерно линейно пространство**. Причината за това е следната – всяко крайномерно пространство има **краен брой базисни функции**, а всяка функция от дадено **линейно пространство** може да се представи като **линейна комбинация на базисните му функции**. Така всяка функция от едно линейно крайномерно пространство може да се зададе като **крайна линейна комбинация**. С други думи, ако искаме да определим конкретна функция от крайномерно линейно пространство, то трябва да определим краен брой числа – нейните коефициенти в линейната комбинация. И така, ако искаме да приближим произволна функция f с функция от някакво крайномерно пространство (пространството от алгебрични полиноми, пространството от експоненциални полиноми, пространството от тригонометрични полиноми и т.н.), трябва да определим коефициентите в представянето в това пространство, виж Фиг. 6.2.

Нека сега разгледаме задачата за намиране на интерполационен полином от произволно дадено крайномерно линейно пространство.

Определение 5. Нека $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ са дадени линейно независими и непрекъснати функции в $[a, b]$. Линейната комбинация

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)$$

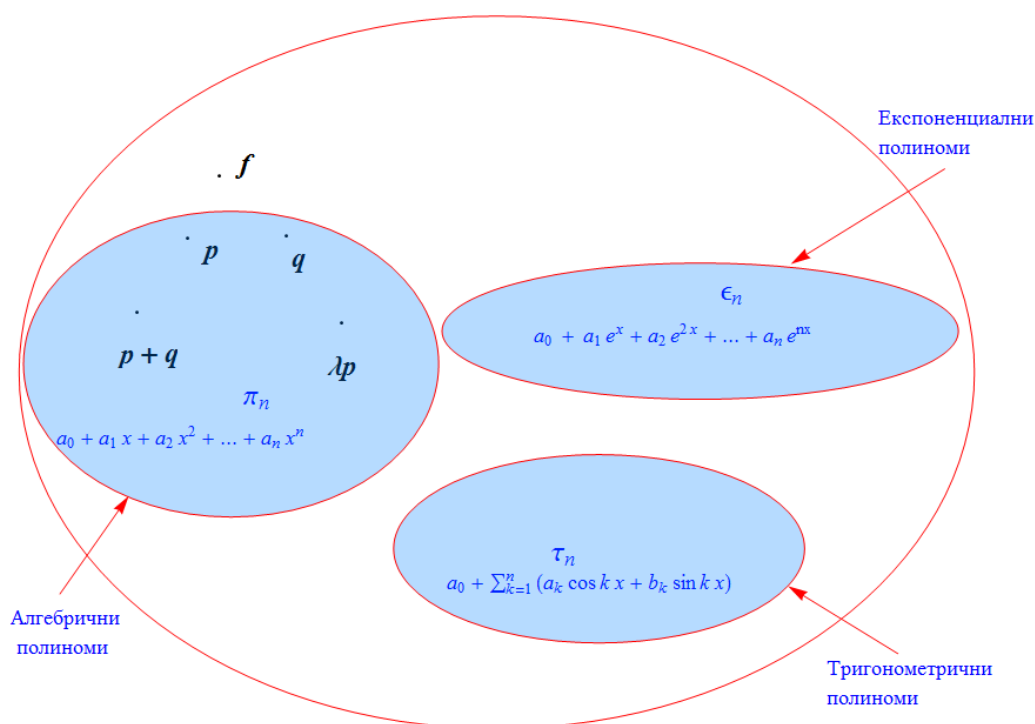
ще наричаме *обобщен полином по системата от функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$* .

Обща интерполационна задача

Нека в $[a, b]$ са дадени възли $x_0 < \dots < x_n$ и y_0, \dots, y_n са дадени стойности. Търсим обобщен полином $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)$, който да удовлетворява интерполационните условия

$$\varphi(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n. \quad (6.2)$$





Фигура 6.2: Приближаване на произволна функция f чрез пространството от алгебрични, експоненциални или тригонометрични полиноми.

Последната задача може да се запише като линейна система по отношение на неизвестните коефициенти a_0, \dots, a_n :

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Следователно интерполационната задача (6.2) има единствено решение тогава и само тогава, когато детерминантата на матрицата на системата е различна от 0. Матрицата на системата ще бележим с $D[x_0, \dots, x_n]$. Оказва се, че единствеността на решението на общата интерполационна задача може да се покаже и по друг начин, като се провери дали системата от функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ изпълнява условието да бъде **система на Чебишов**.

Определение 6. Казваме, че функциите $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ образуват **система на Чебишов** (в литературата още се среща като T -система) в интервала I , ако всеки ненулев обобщен полином по тази система има най-много n различни нули в I .

Да припомним, че ненулев полином означава, че поне един от коефициентите в представянето му (6.1) е различен от 0. И така, в сила е следната теорема, която показва, че ако системата $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ е Чебишова в даден интервал I , то общата интерполационна задача по тази система има единствено решение за всеки избор на възли от този интервал.

Теорема 8. Функциите $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ образуват система на Чебишов в интервала I тогава и само тогава, когато за **всеки избор** на точки $x_0 < \dots < x_n$ от I

$$\det D[x_0, \dots, x_n] \neq 0.$$



С други думи, последната теорема ни казва, че достатъчно условие общата интерполационна задача да има единствено решение за всеки избор на възлите е базисните функции на крайно-мерното пространство, в което търсим решение, да образуват система на Чебишов.

Пример 3. Най-простият пример за Чебишова система е системата от функции $\varphi_k(x) = x^k$. От основната теорема на алгебрата знаем, че всеки алгебричен полином

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

има най-много n различни нули, което означава, че системата е Чебишова. За интерполационната задача, в която търсим приближаващ алгебричен полином, вече показахме, че решението е единствено, когато възлите на интерполация са различни.

Задача 1. Да се докаже, че $\{x^{2k+1}\}_{k=0}^n$ образуват Чебишова система в произволен интервал $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta$.

Доказателство. Нека

$$\varphi(x) = a_0x + a_1x^3 + \dots + a_nx^{2n+1}$$

е произволен обобщен полином по тази система. Ще покажем, че той има не повече от n различни нули във всеки интервал $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta$, като го сведем чрез полагане до алгебрично уравнение от степен n . Да разгледаме уравнението

$$a_0x + a_1x^3 + \dots + a_nx^{2n+1} = 0.$$

Тъй като $x = 0$ не е в интервала $[\alpha, \beta]$, то можем да разделим на x двете страни на последното уравнение:

$$a_0 + a_1x^2 + \dots + a_nx^{2n} = 0. \quad (6.3)$$

Полагаме $y = x^2$, за да сведем горното уравнение до алгебрично уравнение от степен n :

$$a_0 + a_1y + \dots + a_ny^n = 0.$$

От основната теорема на алгебрата знаем, че това уравнение има най-много n различни реални корена. Тъй като $x = \pm\sqrt{y}$ има най-много едно положително решение (ако $y > 0$, имаме решение $x = \sqrt{y}$), то на всяко y се съпоставя най-много едно положително число x , което да принадлежи на $[\alpha, \beta]$. Така (6.3) има най-много n различни корена в съответния интервал, т.е. системата е Чебишова в съответния интервал.

Забележка: Да обвърнем внимание, че интервалът, в който изследваме системата функции е от съществено значение. В този случай използвахме, че корените на уравнението трябва да са положителни. \square

Преди да докажем следващата задача, ще припомним теоремата на Рол, върху която ще базираме доказателството си.

Теорема 9 (Теорема на Рол). Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, диференцируема в отворения интервал (a, b) и приема равни стойности в двата края на интервала, т.е. $f(a) = f(b)$. Тогава $\exists \xi \in [a, b]$, за която $f'(\xi) = 0$.

Задача 2. Докажете, че $\{1, e^{2x}, e^{5x^2}\}$ образуват система на Чебишов в $(-\infty, +\infty)$.

Доказателство. За да бъде системата Чебишова, трябва всеки ненулев обобщен полином

$$\varphi(x) = a_0 + a_1e^{2x} + a_2e^{5x^2}$$



да има най-много 2 различни нули в $(-\infty, +\infty)$. Да допуснем противното. Нека обобщеният полином има три различни нули в $(-\infty, +\infty)$. Ще докажем, че тогава $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, т.е. $\varphi(x) \equiv 0$ е нулевият полином и достигаем до противоречие.

Тъй като $\varphi(x)$ има 3 различни нули, то от теоремата на Рол следва, че $\varphi'(x)$ трябва да има поне 2 различни нули (в нашия случай функцията φ приема равни стойности в своите корени – там тя е нула, което означава, че между всеки два корена съществува поне една точка, в която производната се нулира). Имаме

$$\varphi'(x) = 2a_1e^{2x} + 10a_2xe^{5x^2} = 2e^{2x} \left(a_1 + 5a_2xe^{5x^2-2x} \right).$$

Нека означим $g(x) := a_1 + 5a_2xe^{5x^2-2x}$. Тъй като $e^{2x} > 0, \forall x$, то нулите на $\varphi'(x)$ съвпадат с нулите на $g(x)$. Така $g(x)$ има поне 2 различни нули в $(-\infty, +\infty)$. Отново по теоремата на Рол следва, че $g'(x)$ има поне една нула, т.е.

$$\underbrace{5a_2e^{5x^2-2x} + 5a_2xe^{5x^2-2x}(10x-2)}_{g'(x)} = 0$$

има поне 1 решение. Изнасяме общ множител от лявата страна на последното уравнение и получаваме

$$5a_2 \underbrace{e^{5x^2-2x}}_{\neq 0} \underbrace{(10x^2 - 2x + 1)}_{\neq 0} = 0.$$

Последното влече $a_2 = 0$. Така $\varphi'(x) = 0 \iff a_2 = a_1 = 0$ и следователно $\varphi(x) = 0 \iff a_2 = a_1 = a_0 = 0$. Достигнахме до противоречие, защото по условие $\varphi(x)$ е ненулев обобщен полином. Следователно $\varphi(x)$ има най-много 2 нули в $(-\infty, +\infty)$. \square

Задача 3. Нека функциите $\{\varphi_k(x)\}_0^n$ образуват система на Чебишов в $[a, b]$ и $\psi(x) > 0$ при $x \in [a, b]$. Да се докаже, че функциите $\{\psi(x)\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ също образуват система на Чебишов в $[a, b]$.

Доказателство. Да разгледаме системата от функции $\{\psi(x)\varphi_k(x)\}_0^n$. Произволен обобщен полином по последната система има вида

$$\Psi(x) = a_0\psi(x)\varphi_0(x) + \dots + a_n\psi(x)\varphi_n(x).$$

Изнасяме $\psi(x)$ пред скоби и получаваме

$$\Psi(x) = \psi(x) (a_0\varphi_0(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)).$$

Тъй като $a_0\varphi_0(x), \dots, a_n\varphi_n(x)$ е обобщен полином по системата $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$, която е Чебишова, а $\psi(x) > 0$ по условие, то $\Psi(x)$ има толкова нули, колкото линейната комбинация $a_0\varphi_0(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)$, т.е. има най-много n различни нули. \square

Нека сега разгледаме пример за една Чебишова система, в която ясно се вижда значението на интервала I .

Задача 4. Да се докаже, че $\{1, \cos x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[0, \pi]$, но не и в интервала $[0, 2\pi]$.

Доказателство. Ще докажем, че обобщеният полином

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 \cos x$$



има най-много една нула в интервала $[0, \pi]$. Да отбележим, че условието $a_1 = 0$ влече $a_0 = 0$, което означава, че $\varphi(x)$ в този случай е нулевият полином. Следователно ние се интересуваме от случая, в който $a_1 \neq 0$. От $a_0 + a_1 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{a_0}{a_1}$. Тъй като в интервала $[0, \pi]$ е в сила $-1 \leq \cos x \leq 1$, то ако $-1 \leq -\frac{a_0}{a_1} \leq 1$ задачата ще има едно решение, а в противен случай – няма да има. С други думи, обобщеният полином по системата има най-много една нула, следователно системата е Чебишова.

Да разгледаме сега интервала $[0, 2\pi]$. Достатъчно е да покажем, че съществува полином, който има повече от 1 нула. Да разгледаме например полинома

$$\psi(x) = 0.1 + 1 \cdot \cos x = \cos x \quad (a_0 = 0, a_1 = 1).$$

В интервала $[0, 2\pi]$ последният има два корена $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, което означава, че системата не е Чебишова в този интервал. \square

И така, показахме, че системата от функции не е Чебишова в $[0, 2\pi]$. Това означава, че произволен избор на интерполационни възли в този интервал не може да ни гарантира съществуване и единственост на решението. Да илюстрираме това с пример.

Пример 4. Да се намери обобщен полином по базиса $\{1, \cos x\}$, който интерполира таблицата

(а)

x	0	2π
$\varphi(x)$	0	2

(б)

x	0	2π
$\varphi(x)$	0	0

Решение. Коэффициентите в обобщения полином $\varphi(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot \cos x$ ще намерим, като решим системата уравнения, получена от интерполационните условия.

(а) Заместваме интерполационните условия и получаваме

$$\begin{cases} a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 = 0 \\ a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 = 2 \end{cases}$$

Очевидно в този случай задачата няма решение.

(б) Получената система

$$\begin{cases} a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 = 0 \\ a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 = 2 \end{cases}$$

има безброй много решения.

Както виждаме, тъй като системата не е Чебишова в интервала $[0, 2\pi]$, то съществуването и единствеността на решението на интерполационната задача не може да се гарантира за произволен избор на възли от този интервал.

Да обърнем внимание, че една система може да не е Чебишова в даден интервал, но възлите могат да се изберат така, че въпреки това интерполационната задача да има единствено решение.

Например за възлите $x_0 = 0, x_1 = 3\pi/2$, които лежат в $[0, 2\pi]$, задачата

x	0	$3\pi/2$
$\varphi(x)$	0	2

има единствено решение $\varphi(x) = 2 - 2 \cos x$.



□

Задача 5. Да се докаже, че функциите $\{\cos(kx)\}_{k=0}^n$ образуват система на Чебишов в интервала $[0, \pi]$.

Доказателство. Нека

$$\varphi(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot \cos x + a_2 \cdot \cos 2x + \dots + a_n \cdot \cos nx$$

е произволен ненулев обобщен полином по системата. Да допуснем, че полиномът има $n + 1$ различни нули в интервала $[0, \pi]$. Ще покажем, че от допуснатото следва, че полиномът $\varphi(x)$ съвпада с нулевия полином, което е в противоречие с неговото построение.

Да направим смяна $x = \arccos t$ и да означим $\psi(t) = \varphi(\arccos t)$. Тъй като $x \in [0, \pi]$, то $t \in [-1, 1]$. Заместваме смяната в обобщения полином и получаваме

$$\begin{aligned} \psi(t) &= a_0 + a_1 \cos(\arccos t) + a_2 \cos(2 \arccos t) + \dots + a_n \cos(n \arccos t) \\ &= a_0 T_0(t) + a_1 T_1(t) + \dots + a_n T_n(t), \end{aligned}$$

където $T_k(x)$ е k -тият полином на Чебишов от I род. Тъй като $T_k(t) \in \pi_k$ (виж упражнението за полиноми на Чебишов), то $\psi(t) \in \pi_n$. От друга страна, допуснахме, че полиномът има $n + 1$ различни нули, т.е. $\psi(t) \equiv 0$ и достигнахме до противоречие. Следователно полиномът има не повече от n различни нули в $[0, \pi]$. □

6.2 Интерполиране с тригонометрични полиноми

Нека сега се спрем на задачата за интерполиране с тригонометрични полиноми. На нея ще отделим специално внимание, предвид факта, че много често в практиката се налага работата с периодични данни, т.е. се изисква работа с периодични функции.

Вече показахме, че системата от функции $\{\cos kx\}_{k=0}^n$ образува система на Чебишов в интервала $[0, \pi]$. Оказва се, че функциите

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx,$$

също образуват система на Чебишов – в интервала $[0, 2\pi]$. Полином, представен именно по тази система от функции, ще наричаме **тригонометричен полином**.

Определение 7. Израз от вида

$$\tau_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

наричаме тригонометричен полином от ред n .

Да обърнем внимание, че тригонометричният полином от ред n има в представянето си $2n + 1$ на брой събираеми. Например:

- $\tau_1(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x;$
- $\tau_2(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x;$

и т.н.

Фактът, че функциите от представянето на тригонометричния полином образуват Чебишова система в $[0, 2\pi]$, следва от доказаната на лекции следваща лема.



Лема 2. Всеки ненулев тригонометричен полином от ред n има не повече от $2n$ различни нули в $[0, 2\pi)$.

Като следствие на горната лема може да се покаже, че системата е Чебишова и във всеки от интервалите $[\alpha, \alpha + 2\pi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. От последното и от теоремата за единствеността на решението на обобщената интерполационна задача можем да формулираме следващата теорема.

Теорема 10. Нека $\alpha \leq x_0 < \dots < x_{2n} < \alpha + 2\pi$. Тогава за всяка функция f , определена в точките x_0, x_1, \dots, x_{2n} , съществува единствен тригонометричен полином от ред n такъв, че $\tau_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 2n$.

Да обърнем внимание, че тригонометричният полином от ред n , който се представя по функциите

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx,$$

има $2n+1$ коефициента и следователно за него трябва да се наложат $2n+1$ интерполационни условия.

Както вече казахме, когато разглеждаме дадена задача, често е полезно да имаме няколко различни начина за намирането на решението ѝ – например за решаване на интерполационните задачи можем да подходим чрез решаване на система, намиране на аналитична формула и т.н. Да разгледаме един пример за намирането на тригонометричен полином чрез решаването на получената от интерполационните условия система в програмата *Wolfram Mathematica*.

Пример 5. Да се намери тригонометричният полином, интерполиращ таблицата

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/2$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$
y	0.1	0.807107	1.1	0.807107	0.1	-0.607107	-0.9

Решение. Нека първо обърнем внимание, че данните се съдържат в интервал с дължина 2π и следователно ще имаме единствено решение. Тъй като имаме седем интерполационни условия, то интерполационния полином ще търсим във вида

$$\tau(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x + a_3 \cos 2x + a_4 \sin 2x + a_5 \cos 3x + a_6 \sin 3x.$$

Последния можем да намерим, като решим системата, получена от интерполационните условия

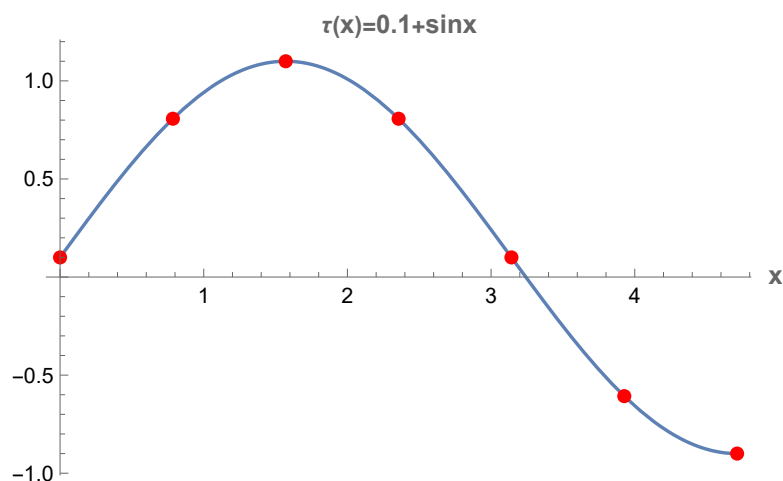
$$\tau(x_0) = y_0, \tau(x_1) = y_1, \dots, \tau(x_6) = y_6.$$

Решаваме съответната система като използваме вградената функция *Solve* във *Wolfram Mathematica*:

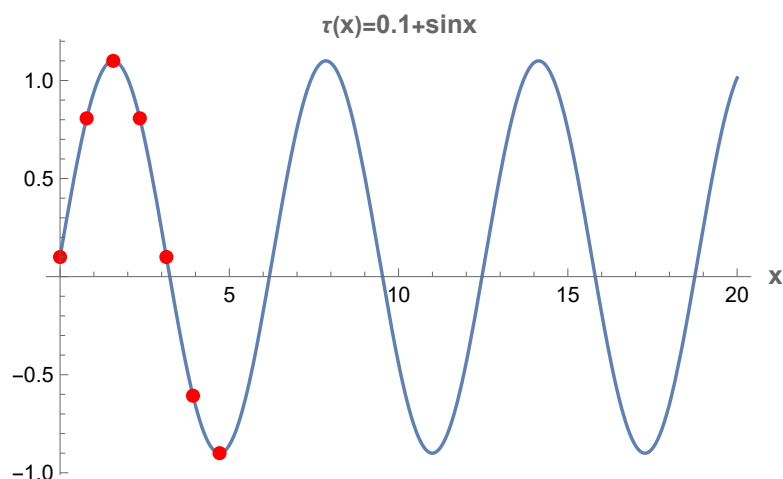
```
 $\tau[x_] = a0 + a1 \text{Cos}[x] + a2 \text{Sin}[x] + a3 \text{Cos}[2x] + a4 \text{Sin}[2x] + a5 \text{Cos}[3x] + a6 \text{Sin}[3x];$ 
Solve[{ $\tau[0] == 0.1$  &&  $\tau[\text{Pi}/4] == 0.807107$  &&  $\tau[\text{Pi}/2] == 1.1$  &&  $\tau[3\text{Pi}/4] == 0.807107$  &&
 $\tau[\text{Pi}] == 0.1$  &&  $\tau[5\text{Pi}/4] == -0.607107$  &&  $\tau[3\text{Pi}/2] == -0.9$ }, {a0, a1, a2, a3, a4, a5, a6}]
```

На следващата графика може да видим получения интерполационен полином $\tau(x) = 0.1 + \sin x$ заедно с данните от таблицата:





Да обърнем внимание, че тригонометричният полином, който интерполира данните, е 2π -периодична функция:



□

Оказва се, че за задачата за интерполация с тригонометрични полиноми също съществува аналитична формула за намирането на интерполационния полином. Постъпвайки аналогично на формулата на Лагранж, търсим полинома във вида

$$\tau_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \lambda_k(x),$$

където базисните функции са тригонометрични полиноми, които удовлетворяват условията $\lambda_k(x_i) = \delta_{ki}$. Такъв базис, който удовлетворява дадените условия, се нарича интерполационен базис.

Теорема 11. Нека $\{x_k\}_{k=0}^{2n}$ са произволни точки, такива че $\alpha \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < \alpha + 2\pi$ за някакво α и f е произволна функция, определена в тях. Тогава

$$\tau_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \prod_{i=0, i \neq k}^{2n} \frac{\sin \frac{x - x_i}{2}}{\sin \frac{x_k - x_i}{2}}$$



е единственият тригонометричен полином от ред n , който интерполира f в x_0, \dots, x_{2n} .

Както виждаме, е много удобно, ако можем да въведем интерполяционен базис в пространството, защото тогава можем да напишем проста формула за решението на интерполяционната задача, която е аналог на формулата на Лагранж. При интерполирането с алгебрични полиноми, вече показахме, че съществуват удобни интерполяционни формули в случая на **равноотдалечени възли**. Оказва се, че такава формула може да се изведе и за тригонометричните полиноми.

Теорема 12. Нека са дадени $2n + 1$ равноотдалечени възела в интервала $[0, 2\pi)$, по-точно $x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $k = \overline{0, 2n}$. Тогава за тригонометричния полином $\tau_n(x)$, който интерполира функцията $f(x)$ в тези възли, е в сила формулата

$$\tau(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos kx + B_k \sin kx),$$

където

$$A_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} y_i \cos(kx_i), \quad k = \overline{0, n}, \quad B_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} y_i \sin(kx_i), \quad k = \overline{1, n}.$$

Обърнете внимание, че знаменателят $2n + 1$ в коефициентите пред сумите в представянето за A_k, B_k е точно равен на броя на интерполяционните възли в съответната интерполяционна задача.

Задача 6. Като използвате формулата за тригонометрична интерполация при равноотдалечени възли, определете A_0, A_1, B_1 така, че $\tau(x) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos x + B_1 \sin x$ да удовлетворява условията

$$\tau(0) = 1, \quad \tau\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2, \quad \tau\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2.$$

Решение. За $n = 1$ заместваме в горните формули $x_0 = 0, x_1 = 2\pi/3, x_2 = 4\pi/3, y_0 = 1, y_1 = y_2 = 2$ и получаваме

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{3} \sum_{i=0}^2 y_i \cos(0x_i) = \frac{2}{3} (y_0 + y_1 + y_2) = \frac{2}{3} (1 + 2 + 2) = \frac{10}{3}; \\ A_1 &= \frac{2}{3} \sum_{i=0}^2 y_i \cos x_i = \frac{2}{3} \left(1 \cos 0 + 2 \cos \frac{2\pi}{3} + 2 \cos \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(1 + 2 \left(-\frac{1}{2} \right) + 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = -\frac{2}{3}; \\ B_1 &= \frac{2}{3} \sum_{i=0}^2 y_i \sin x_i = \frac{2}{3} \left(1 \sin 0 + 2 \sin \frac{2\pi}{3} + 2 \sin \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(0 + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Следователно търсеният тригонометричен полином е $\tau(x) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \cos x$. □



Допълнителни задачи

Задача 7. Като използвате формулата за тригонометрична интерполация при равноотдалечени възли, определете коефициентите a_0, a_1, b_1 така, че $\tau(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ да удовлетворява условията:

(а) $\tau(0) = 1, \tau\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4, \tau\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 1;$ (в) $\tau(0) = -3, \tau\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1, \tau\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -1.$

(б) $\tau(0) = -1, \tau\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1, \tau\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 3;$

Отг. (а) $\tau_1(x) = 2 - \cos x + \sqrt{3} \sin x;$ (б) $\tau_1(x) = 1 - 2 \cos x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin x;$ (в) $\tau_1(x) = -1 - 2 \cos x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin x.$



Глава 7

Сплайн-функции. Интерполиране с кубични сплайни

7.1 Сплайн-функции

Вече показахме, че има и други класове от функции, освен алгебричните полиноми, които могат да се използват за описване на дадени процеси – тригонометрични, експоненциални полиноми и др. В това упражнение ще се спрем на още един клас функции (т.нар. сплайн-функции или сплайни), който играе основна роля при различни практически задачи на изчислителната математика – интерполиране, числено диференциране, интегриране и др. Сплайните играят ключова роля например в компютърната графика и в различни инженерни задачи.

Както знаем, интерполирането с алгебрични полиноми може да има някои сериозни недостатъци. Такива например са:

- Полиномите от висока степен имат свойството да осцилират. Обикновено грешката при тях в някои интервали може да бъде много голяма (особено в краищата на интервала на интерполация);
- Високите степени на полинома могат да доведат до по-големи грешки от закръгляване;
- Колкото по-висока степен има даден полином, толкова повече коефициенти в представянето му трябва да се определят;
- Теоремата за оценка на грешката в общия случай не дава „сходимост“ на решението. Последното означава, че в общия случай дори и да избираме все по-голям брой интерполационни възли, полученият интерполационен полином може и да не клони към функцията f . Вече илюстрирахме известния феномен на Рунге. За произволна задача няма как да сме сигурни, че резултатът, който получаваме, ще бъде най-добър от гледна точка на достигане на минимална грешка;
- Всеки алгебричен полином е безкрайно диференцируем. Такава гладкост на решението обикновено не е необходима.

И така, за точността на интерполиране основно значение имат дължината на интервала на интерполация и степента на полинома. С други думи, бихме искали дължината на интервала да е достатъчно малка, а степента на полинома – достатъчно ниска. В такъв случай бихме могли да направим следното – да разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, n$, където $x_0 = a$ и $x_{n+1} = b$, и във всеки подинтервал да намерим полином $p_i(x)$ от някоя ниска степен, който да интерполира данните в този интервал (или функцията). С други думи, ще търсим решението на интерполационната задача като **по части полиномиална крива**. Обикновено тази

полиномиална крива трябва да описва гладък процес, затова ще налагаме допълнителни условия за гладкост, т.е. всяка от кривите в подинтервалите да се свързва гладко с полиномиалните криви от съседните интервали. Разбира се, това става, като наложим условия за нейните производни.

Определение 8. Ще казваме, че $s(x)$ е сплайн-функция (или сплайн) от степен r с възли $t_1 < \dots < t_n$ (англ. **knots**; за разлика от **nodes**, който се използва за възли при интерполация), ако удовлетворява следните условия:

1. $s(x)$ е полином от степен най-много r (т.е. е от π_r) във всеки подинтервал (t_i, t_{i+1}) , $i = \overline{0, n}$, където $t_0 = -\infty, t_{n+1} = +\infty$;
2. $s(x), s'(x), \dots, s^{(r-1)}(x)$ са непрекъснати функции в $(-\infty, +\infty)$, т.е. $s(x) \in C^{r-1}$. Нека означим с $p_i(x)$ алгебричния полином от π_r , с който съвпада сплайнът $s(x)$ в интервала $[t_i, t_{i+1}]$. Тогава за $i = \overline{1, n}$ имаме условията:

$$\begin{aligned} p_{i-1}(t_i) &= p_i(t_i), \\ p'_{i-1}(t_i) &= p'_i(t_i), \\ &\vdots \\ p_{i-1}^{(r-1)}(t_i) &= p_i^{(r-1)}(t_i). \end{aligned}$$

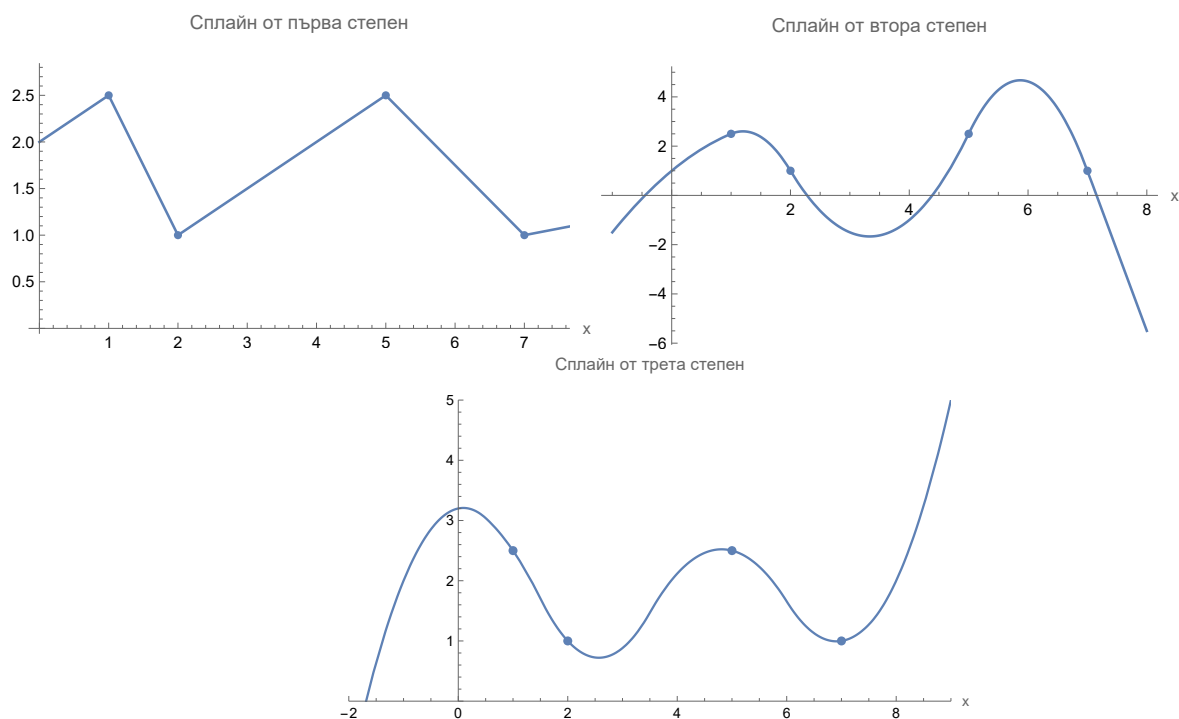
Множеството от сплайн-функции от степен r с възли $t_1 < \dots < t_n$ ще бележим с $S_r(t_1, \dots, t_n)$.

Нека сега обясним по-подробно горната дефиниция. Сплайн от степен r е по части полиномиална функция, която във всеки интервал съвпада с полином от степен, ненадминаваща r . Нещо повече, всеки сплайн трябва да удовлетворява условие за гладкост във всеки един от възлите си – полиномите от два съседни интервала трябва да се свързват гладко в съответния възел, т.е. да имат равни стойности в него, както и равни производни.

На Фиг. 7.1 са дадени сплайни от първа, втора и трета степен, построени за едни и същи възли. Да обърнем внимание на следното.

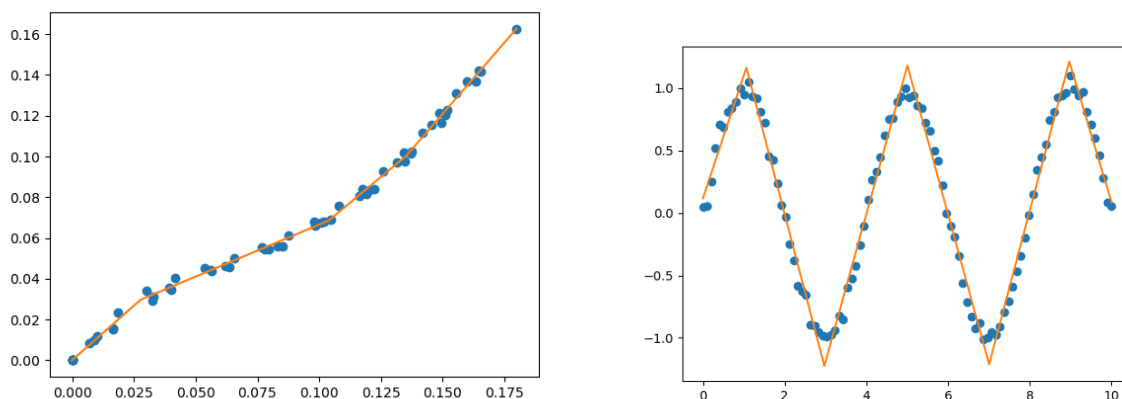
- Сплайните от първа степен (линейни сплайни) са непрекъснати функции, които са по части полиноми от първа степен. Недостатък на сплайните от първа степен е, че техните първи производни често са прекъснати във възлите на сплайна, т.е. те не са гладки функции.
- Сплайните от втора степен (квадратични сплайни) са непрекъснати функции, които са по части полиноми от втора степен с непрекъснати първи производни.
- Сплайните от трета степен (кубични сплайни) са по части полиноми от трета степен с непрекъснати първи и втори производни. Кубичните сплайни са може би на практика най-използваните сплайни за интерполация, заради тяхната гладкост.





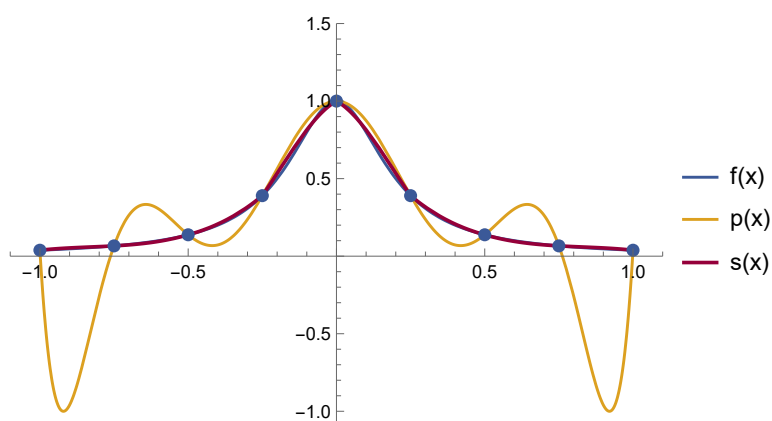
Фигура 7.1: Сплайн-функции от първа, втора и трета степен за едни и същи възли.

На Фиг. 7.2 са дадени примери за сплайни от първа степен (чиито графики са начупени непрекъснати линии), които приближават реални данни, а на Фиг. 7.3 сплайн от трета степен (който, предвид наложените условия за производната, изглежда като „гладка“ крива), който интерполира функцията на Рунге, за която знаем, че при интерполация полиномите от по-висока степен осцилират и грешката от приближаване става голяма, обикновено в края на интервала.



Фигура 7.2: Сплайн-функции от първа степен.





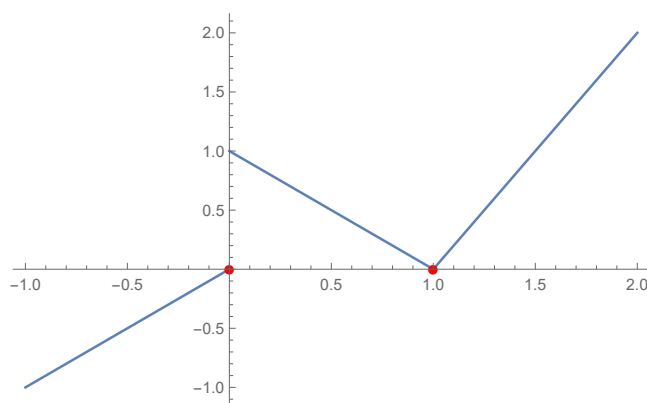
Фигура 7.3: Функцията на Рунге $f(x)$, интерполирана с полином от осма степен $p(x)$ и сплайн от трета степен/кубичен сплайн $s(x)$. Използвани са равноотдалечени възли в $[-1, 1]$ със стъпка 0.25.

От фигурите се вижда голямото предимство на сплайните – те са много гъвкави функции, които могат да описват много сложно поведение на дадени данни. От друга страна, във всеки подинтервал те са полиноми, което ги прави много лесни за работа.

Пример 6. Дадена е функцията $s(x)$ заедно с нейната графика. Определете дали функцията $s(x)$ е сплайн.

(а)

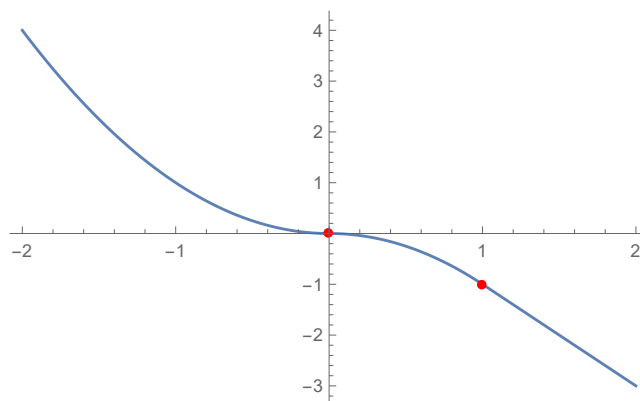
$$s(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0], \\ 1 - x, & x \in (0, 1), \\ 2x - 2, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$



(б)

$$s(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty, 0], \\ -x^2, & x \in (0, 1), \\ 1 - 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$





Нека разгледаме някои следствия от дефиницията на сплайн:

- производната на сплайн от степен r е сплайн от степен $r - 1$;
- r -тата производна на сплайн $s(x) \in S_r(t_1, \dots, t_n)$ е по части константа с евентуални точки на прекъсване във възлите на сплайна;
- r -тата примитивна функция на една функция, която е по части константа, е сплайн от степен r .

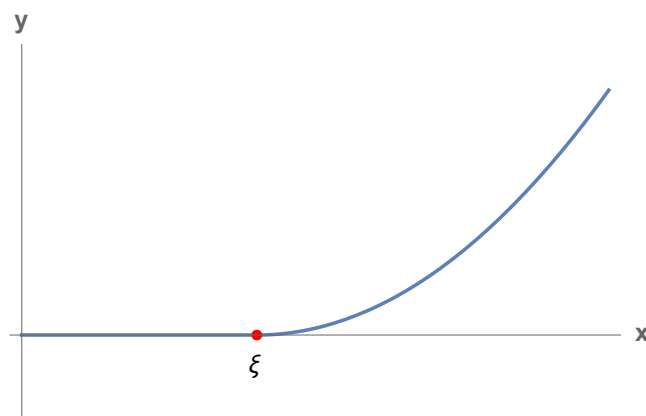
Разбира се, след като дадохме дефиниция на сплайн, естествено е да си зададем въпроса съществува ли базис, по който може да представим всеки сплайн от даден клас. Преди това да разгледаме един частен случай за сплайн от степен r с един възел, върху който ще построим базис за сплайн-функцията.

Определение 9. Функцията

$$(x - \xi)_+^r = \begin{cases} (x - \xi)^r, & x \geq \xi, \\ 0, & x < \xi, \end{cases}$$

ще наричаме **отсечена степенна функция**.

Последната очевидно изпълнява условията за сплайн от степен r с възел ξ – във всеки от двата интервала тя е от π_r и левите и десните ѝ производни до ред $r - 1$ в точката ξ съвпадат (равни са на 0). Графиката на отсечената степенна функция е дадена на Фиг. 7.4.



Фигура 7.4: Графиката на отсечената степенна функция $(x - \xi)_+^r$.



Оказва се, че отсечената степенна функция играе основна роля в теорията на сплайн-функциите. Следващата теорема показва, че всеки сплайн се представя като сума на алгебричен полином от π_r и линейна комбинация на подходящи отсечени степенни функции.

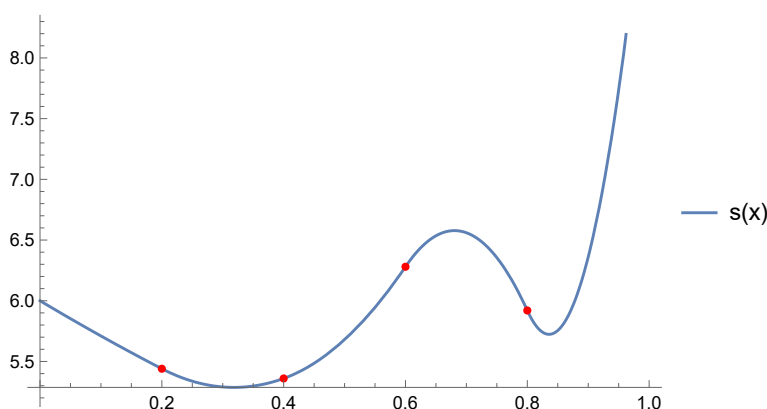
Теорема 13. Всяка сплайн-функция $s(x)$ от класа $S_r(t_1, \dots, t_n)$ се представя по единствен начин във вида

$$s(x) = p(x) + \sum_{k=1}^n c_k (x - t_k)_+^r, \quad (7.1)$$

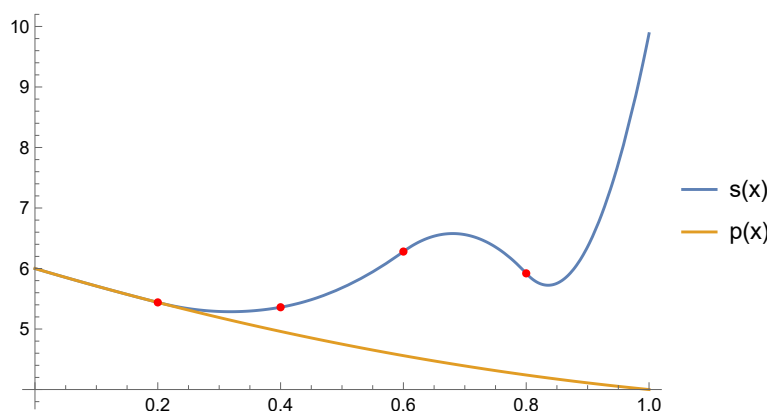
където $p(x) \in \pi_r$, а c_1, \dots, c_n са реални числа. Нещо повече, коефициентите c_k се задават по формулата

$$c_k = \frac{s^{(r)}(t_k + 0) - s^{(r)}(t_k - 0)}{r!}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Нека сега обясним представянето на сплайна като линейна комбинация на отсечени степенни функции и полином от π_r . Ясно е, че за да определим сплайна, то трябва във всеки интервал да определим алгебричния полином, който съвпада с него. Нека разгледаме следната примерна фигура на сплайн $s(x)$ от втора степен (квадратичен сплайн) с 4 възела t_1, t_2, t_3, t_4 (на графиката $t_1 = 0.2, t_2 = 0.4, t_3 = 0.6, t_4 = 0.8$):



В първия интервал $s(x)$ съвпада с някакъв (очевидно единствен) полином $p(x) \in \pi_2$, както е показано на следната фигура:

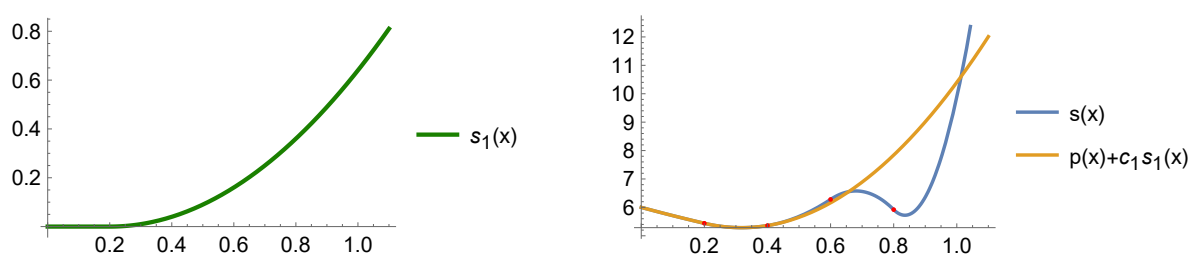


Искаме към полинома да прибавим някаква функция $s_1(x)$ така, че във втория интервал (t_1 до t_2) графиката на получената функция $p(x) + s_1(x)$ също да съвпада с графиката на сплайна. Следователно трябва да прибавим функция $s_1(x)$, която:



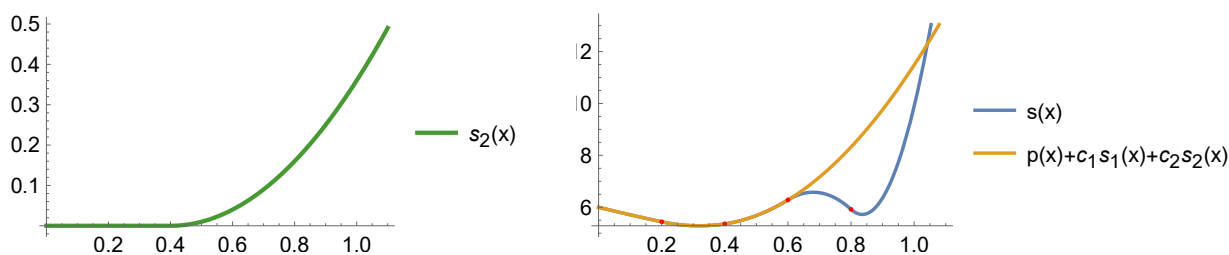
- не променя нищо в първия интервал;
- е полином от π_2 във втория;
- стойността ѝ в t_1 е 0;
- стойността на първата ѝ производна в t_1 също е 0 (това ще гарантира непрекъснатостта на производната).

Такова условие удовлетворява точно отсечената степенна функция $s_1(x) = (x - t_1)_+^2$, умножена по константа c_1 такава, че $p(x) + c_1 s_1(x)$ да минава през нужната стойност за възела t_2 . Графиките на $s_1(x)$ и $p(x) + c_1 s_1(x)$ са показани по-долу.



Фигура 7.5: Графика на $s_1(x)$ (вляво) и $p(x) + c_1 s_1(x)$ заедно с $s(x)$ (вдясно).

Ще постъпим аналогично и за третия интервал. Към функцията $p(x) + c_1 s_1(x)$ прибавяме константа по отсечената степенна функция $s_2(x) = (x - t_2)_+^2$. Така не променяме нищо в първите два интервала спрямо предходната фигура, а целим да получим „правилния” полином в третия интервал.



Фигура 7.6: Графика на $s_2(x)$ (вляво) и $p(x) + c_1 s_1(x) + c_2 s_2(x)$ заедно с $s(x)$ (вдясно).

За да получим сплайна, продължаваме аналогично за всеки следващ интервал.

От последната теорема 13 следва, че всеки сплайн от степен r с възли t_1, \dots, t_n има вида

$$s(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r}_{p(x)} + c_1 (x - t_1)_+^r + c_2 (x - t_2)_+^r + \dots + c_n (x - t_n)_+^r,$$

т.е. може да се разглежда като обобщен полином по базиса $1, x, \dots, x^r, (x - t_1)_+^r, \dots, (x - t_n)_+^r$.

Следователно множеството $S_r(t_1, \dots, t_n)$ е **крайномерно линейно пространство с размер-**



ност $n + r + 1$. За да определим еднозначно сплайн от степен r с възли t_1, \dots, t_n , представен във вида (7.1), трябва да определим коефициентите му, които са $n + r + 1$ на брой.

7.2 Интерполиране с кубични сплайни

В това упражнение ще се спрем на въпроса за интерполиране с кубични сплайни, тъй като те са може би най-често използваните на практика сплайни за интерполация, заради тяхната гладкост. Да припомним, че за да бъде една по части полиномиална функция кубичен сплайн с възли t_1, \dots, t_n , тя трябва да изпълнява следните условия:

- да бъде полином от степен, ненадминаваща три, във всеки подинтервал, определен от възлите на сплайна;
- $s(x), s'(x), s''(x)$ трябва да бъдат непрекъснати функции в интервала $(-\infty, +\infty)$.

Постановка на задачата. Нека $f(x)$ е дадена непрекъснатата в интервала $[a, b]$ функция и $a = x_0 < \dots < x_{n+1} = b$ са дадени интерполационни възли в този интервал. Да се намери сплайн $s(x) \in \mathcal{S}_3(x_1, \dots, x_n)$, който да интерполира f във всеки от възлите.

За възли на сплайна избираме тези интерполационни възли, които по естествен начин разделят интервала $[a, b]$, т.е. x_1, \dots, x_n . Вече казахме, че за да построим $s(x)$, трябва да определим полиномите $p_i(x)$ във всеки подинтервал (x_i, x_{i+1}) , $i = \overline{0, n}$. Да отбележим, че за определянето на всеки полином от вида $p_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$ трябва да определим четирите коефициента в представянето му, т.е. да наложим за него четири условия.

И така, от интерполационните условия веднага следва, че за сплайна е в сила

$$s(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n+1}.$$

От последното следва, че и всеки полином $p_i(x)$ трябва да изпълнява

$$p_i(x_i) = f(x_i), p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), i = \overline{0, n}.$$

Последните условия са еквивалентни на условията за непрекъснатост във възлите на сплайна, т.е. $p_{i-1}(x_i) = p_i(x_i)$, $i = \overline{1, n}$.

От интерполационните условия в задачата получихме, че за всяка функция $p_i(x)$ налагаме 2 (интерполационни) условия. От последното следва, че трябва да зададем още 2 условия, за да я определим еднозначно (тя има 4 неизвестни коефициента). Съществуват различни методи за интерполиране с по части кубични функции, като те се определят от това как сме избрали тези две условия.

• Налагане условия за непрекъснатата първа производна

Можем да поискаме полиномите $p_i(x)$ да удовлетворяват условията

$$p'_i(x_i) = k_i, p'_i(x_{i+1}) = k_{i+1}.$$

Последните гарантират непрекъснатост на първата производна на $s(x)$. За различен избор на числата $\{k_i\}$ получаваме различни интерполиращи функции. Например, ако изберем $k_i = f'(x_i)$, т.е.

$$p'_i(x_i) = f'(x_i), p'_i(x_{i+1}) = f'(x_{i+1}),$$

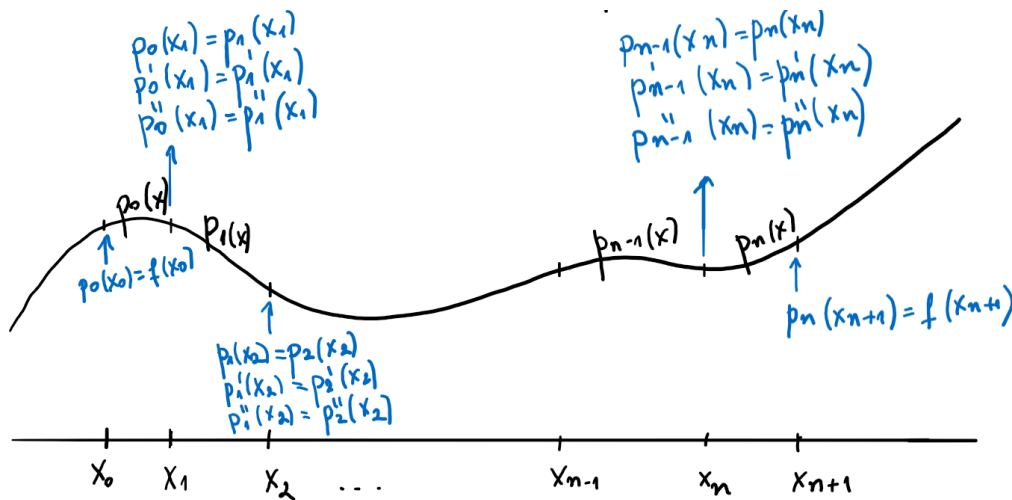
получаваме известната **по части Ермитова интерполация** – в този случай за полиномите $p_i(x)$ се налагат интерполационни условия за първата производна на функцията. Така получената функция се използва често на практика, но не е задължително кубичен сплайн, тъй като няма необходимата гладкост (има само непрекъснатата първа производна, но не и втора).



• **Налагане условия за непрекъсната втора производна**

Нека поискаме по части полиномиалната функция да бъде непрекъсната, с непрекъснати първи и втори производни, т.е. да бъде кубичен сплайн. Оказва се, че такъв винаги съществува, като се **определя еднозначно от „граничните“ условия за производните** $s'(a)$, $s''(a)$, $s'(b)$, $s''(b)$ ($a := x_0$, $b := x_{n+1}$).

За да разберем последното, да припомним, че искаме да определим полиномите $p_0(x)$, $p_1(x), \dots, p_n(x)$, като за всеки от тях трябва да зададем по 4 условия, т.е. общо $4(n+1)$. Да разгледаме следната скица с наложени следните условия за полиномите $p_i(x)$ – условия за интерполиране на f (или съответно условия за непрекъснатост), условия за непрекъснатост на първата и втората производна във възлите на сплайна:



На скицата съответства следната система уравнения:

условие		общ брой условия
(1) $p_i(x_i) = f(x_i)$	$i = 0, \dots, n$	$n + 1$
(2) $p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$	$i = 0, \dots, n$	$n + 1$
(3) $p'_{i-1}(x_i) = p'_i(x_i)$	$i = 1, \dots, n$	n
(4) $p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i)$	$i = 1, \dots, n$	n

Последната система има $4(n+1)$ неизвестни и $4n+2$ условия. Наистина, за да има единствено решение, трябва да зададем още две условия – в граничните точки $a = x_0$ и $b = x_{n+1}$. Следните две допълнителни условия най-често се добавят към горната система:

- (i) Ако $f'(a)$ и $f'(b)$ се знаят, то естествено е да се вземат условията:

$$s'(a) = p'_0(a) = f'(a), \quad s'(b) = p'_n(b) = f'(b).$$

С така зададени условия се получава така наречена **пълна сплайнова кубична интерполация**;

- (ii) Добавят се условия

$$s''(a) = p''_0(a) = 0, \quad s''(b) = p''_n(b) = 0.$$

С тези условия получаваме така наречената **естествена кубична сплайнова интерполация**.



- При **по части Ермитова интерполация** се налагат условия за интерполиране на функцията f и на първите ѝ производни във всеки възел на интерполация;
- При **пълната кубична сплайнова интерполация** (англ. complete spline interpolation) се налагат условия за интерполиране на f във възлите на интерполация; за непрекъснатост на първата и втората производна във възлите на сплайна; за затваряне на задачата допълнително се налагат две условия за интерполиране на първите производни в краищата на интервала:

$$s'(a) = p'_0(a) = f'(a), \quad s'(b) = p'_n(b) = f'(b).$$

- За **естествена кубична интерполация** (англ. natural spline interpolation) се налагат условия за интерполиране на f във възлите на интерполация; за непрекъснатост на първата и втората производна във възлите на сплайна; за затваряне на задачата допълнително се налагат две условия за втората производна в краищата на интервала:

$$s''(a) = p''_0(a) = 0, \quad s''(b) = p''_n(b) = 0.$$

Нека сега разгледаме един конкретен пример за определяне на кубичен сплайн.

Задача 1. Да се намери сплайнът $s(x) \in S_3(0)$, интерполиращ $f(x) = x^4$ при пълна кубична сплайнова интерполация в точките $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Решение. Търсим сплайн от степен $r = 3$ с възел $t_1 = 0$ във вида

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) \in \pi_3, & x \leq 0, \\ p_1(x) \in \pi_3, & x \geq 0, \end{cases}$$

За да бъде кубичната сплайнова интерполация пълна, трябва да зададем:

- условия за интерполация във възлите $-1, 0, 1$;
- условия за непрекъснатост на първата и втората производна във възела на сплайна, т.е. в $x_0 = 0$;
- условия за интерполация на първите производни в двата края, т.е. в $x_0 = 0$ и $x_2 = 1$.

Имаме системата:

$$p_0(x_0) = f(x_0), \quad p'_0(x_0) = f'(x_0) \quad (\text{леви гранични условия}),$$

$$p_0(x_1) = p_1(x_1) = f(x_1), \quad p'_0(x_1) = p'_1(x_1), \quad p''_0(x_1) = p''_1(x_1) \quad (\text{усл. за непрекъснатост във възела } t_0 \equiv x_1),$$

$$p_1(x_2) = f(x_2), \quad p'_1(x_2) = f'(x_2) \quad (\text{десни гранични условия}).$$

Искаме да определим $p_0(x) = a_0 + b_0x + c_0x^2 + d_0x^3$ и $p_1(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3$. Можем да решим задачата по няколко начина. Първият начин е да си разпишем производните на полиномите и да определим коефициентите във всеки един от тях, като решим получената система. Ние ще разгледаме друг подход, който използва наученото от предишните упражнения.

Да заместим интерполационните условия от условието на задачата. Имаме:

$$p_0(-1) = 1, \quad p'_0(-1) = -4,$$

$$p_0(0) = p_1(0) = 0,$$

$$p'_0(0) = p'_1(0) = d \quad (\text{полагаме първата производна да е неизвестен параметър } d),$$

$$p''_0(0) = p''_1(0),$$

$$p_1(1) = 1, \quad p'_1(1) = 4.$$



Ще определим $p_0(x)$ и $p_1(x)$, като решим получените за тях две интерполационни задачи на Ермит – първата за $p_0(x)$ с интерполационни възли $-1, 0$ с кратност 2; втората за $p_1(x)$ с интерполационни възли $0, 1$ с кратност 2. След като намерим решението за тях, неизвестния параметър d ще намерим от условието за непрекъсната втора производна във възела на сплайна, т.е. $p_0''(0) = p_1''(0)$. Имаме интерполационните таблици

$$p_0(x) : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 0 & d \\ \hline \end{array} \quad p_1(x) : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & d & 1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Ще използваме познатата ни схема за определяне на полиномите $p_0(x)$ и $p_1(x)$.

- Определяне на $p_0(x)$

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3
$x_0 = -1$	$f(x_0) = 1$			
$x_1 = -1$	$f(x_1) = 1$	$f[x_0, x_1]^* = -4$		
$x_2 = 0$	$f(x_2) = 0$	$f[x_1, x_2] = -1$	$f[x_0, x_1, x_2] = 3$	
$x_3 = 0$	$f(x_3) = 0$	$f[x_2, x_3]^* = d$	$f[x_1, x_2, x_3] = d + 1$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = d - 2$

От формулата на Нютон за интерполационния полином на Ермит получаваме

$$p_0(x) = 1 - 4(x + 1) + 3(x + 1)^2 + (d - 2)x(x + 1)^2 \Rightarrow p_0''(0) = 4d - 2.$$

- Определяне на $p_1(x)$

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3
$x_0 = 0$	$f(x_0) = 0$			
$x_1 = 0$	$f(x_1) = 0$	$f[x_0, x_1]^* = d$		
$x_2 = 1$	$f(x_2) = 1$	$f[x_1, x_2] = 1$	$f[x_0, x_1, x_2] = 1 - d$	
$x_3 = 1$	$f(x_3) = 1$	$f[x_2, x_3]^* = 4$	$f[x_1, x_2, x_3] = 3$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 2 + d$

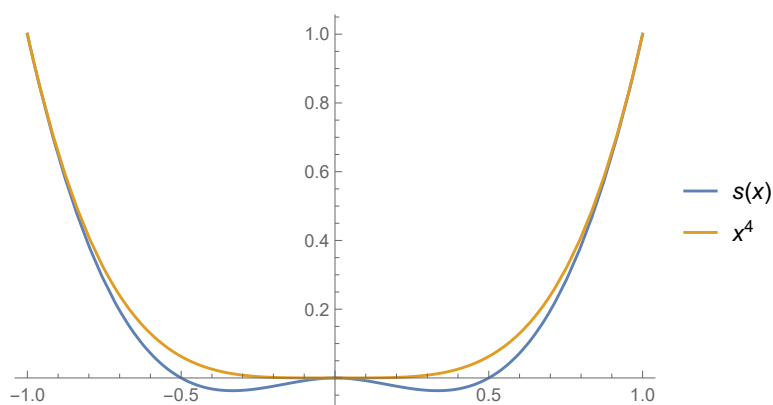
От формулата на Нютон за интерполационния полином на Ермит получаваме

$$p_1(x) = 0 + dx + (1 - d)x^2 + (2 + d)x^2(x - 1) \Rightarrow p_1''(0) = -4d - 2.$$

От условието за непрекъснатостта в $t = 0$ имаме $4d - 2 = -4d - 2 \Rightarrow d = 0$. Следователно търсеният сплайн е

$$s(x) = \begin{cases} -2x^3 - x^2, & x \leq 0, \\ 2x^3 - x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

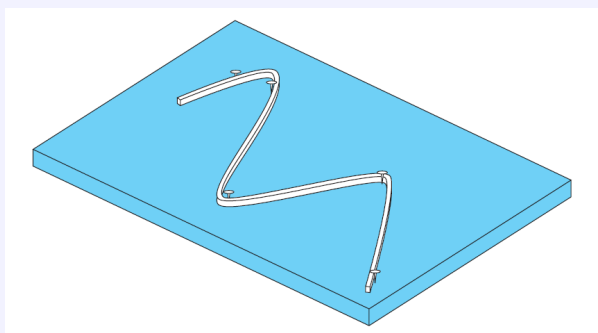




□

Интересно

Понятието сплайн идва от корабостроенето в стари времена, когато сплайн се е наричал специфичен инструмент за чертане. Там се използвал дълъг тънък и плосък инструмент (направен обикновено от дърво или метал), наречен сплайн, който се фиксирал в дадени точки чрез тегла и изглеждал точно като естествен кубичен сплайн. Последният се е използвал като инструмент за чертане на гладки криви, минаващи през дадени точки. При огъването му е известен физически факт, че добива такава форма, при която енергията от деформациите е минимална. Математически аналог на последното е теоремата на Холдей, доказана на лекции. Тази техника се използва и в наши дни при проектирането на кораби.



Допълнителни задачи

Задача 2. Да се намери сплайн $s(x)$, който интерполира точките $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$

- (а) при пълна кубична интерполация с условия $s'(1) = 1$ и $s'(4) = -1$.
- (б) при естествена кубична интерполация.



Глава 8

В-сплайни

Нека е даден сплайн $s(t)$ от степен $r - 1$ с възли $x_1 < \dots < x_n$. В миналото упражнението показвахме, че $s(t)$ може да се представи като линейна комбинация на функциите

$$1, t, \dots, t^{r-1}, (t - x_1)_+^{r-1}, \dots, (t - x_n)_+^{r-1}$$

или очевидно

$$1, t, \dots, t^{r-1}, (x_1 - t)_+^{r-1}, \dots, (x_n - t)_+^{r-1}.$$

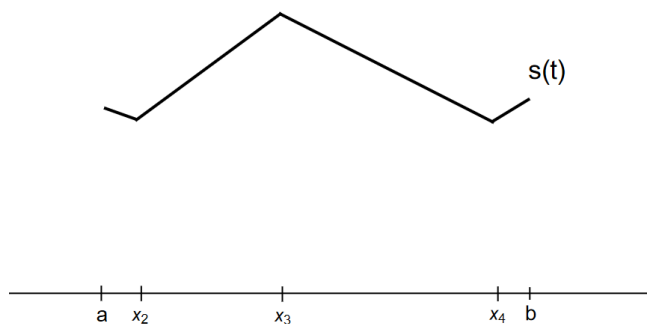
С други думи, ако искаме да определим сплайна в интервала (x_i, x_{i+1}) (т.е. полинома $p_i(t) \in \pi_{r-1}$, с който той съвпада в него), можем да го намерим като линейна комбинация на функциите

$$1, t, \dots, t^{r-1}, (t - x_1)_+^{r-1}, \dots, (t - x_i)_+^{r-1}.$$

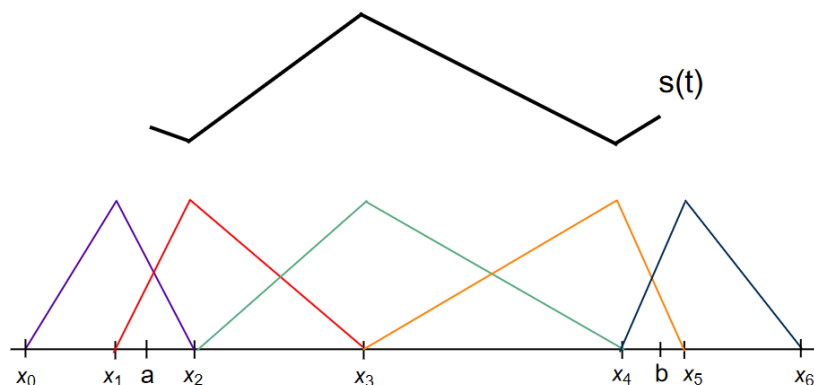
В такъв случай ще искаме да определим полином от степен $r - 1$ като използваме $i + r$ израза. Това, разбира се, не е целесъобразно поради няколко причини. Първо, естествено е да искаме да намерим $p_i(t) \in \pi_{r-1}$ локално (т.е. ако го разглеждаме само върху съответния интервал) като линейна комбинация на r базисни функции, а не $i + r$. Второ, повече базисни функции в представянето му би могло да е причина за възникване на грешки от закръгляване.

Разбира се, ние знаем, че размерността на пространството на сплайн-функциите е по-голяма и следователно единственият начин да определим $p_i(t)$ локално чрез r базисни функции е останалите (тъй като в глобалния базис има толкова функции, колкото е размерността на пространството) да се нулират в този интервал.

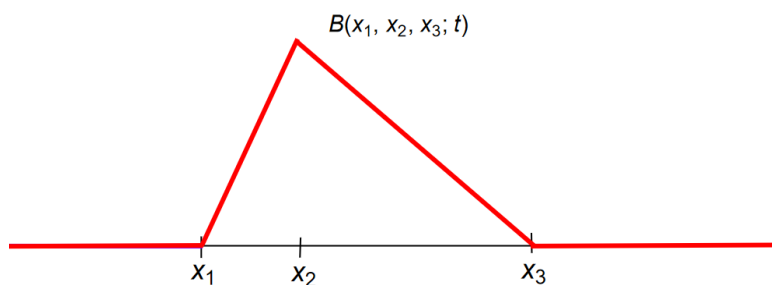
Оказва се, че може да се въведе такъв “хубав” базис, за който във всеки фиксиран интервал да се нулират всички базисни функции с изключение на r от тях. Нека е даден интервал $[a, b]$, в който искаме да определим линеен сплайн $s(t)$ с възли x_2, x_3, x_4 :



Във всеки интервал $[a, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$, ще искаме да определим по два базисни линейни сплайна, ненулеви в съответния интервал, по които може да се представи полиномът, с който съвпада $s(t)$ в този интервал по следния начин:



Нека разгледаме една от тези базисни функции. Например базисната функция, която е ненулева в интервала (x_1, x_3) , е илюстрирана по-долу.



Последната е сплайн от първа степен с възли x_1, x_2, x_3 . Следователно може да се изрази като $p(t) + c_1(x_1 - t)_+ + c_2(x_2 - t)_+ + c_3(x_3 - t)_+$. Да припомним, че

$$(\xi - t)_+^r = \begin{cases} (\xi - t)^r, & t \leq \xi, \\ 0, & t > \xi. \end{cases}$$

Лесно се вижда, че $p(t) \equiv 0$. Базисният сплайн (или накратко B -сплайн) е линейна комбинация на стойностите на функцията $f(x) = (x - t)_+$ в точките x_1, x_2, x_3 . Тази линейна комбинация трябва:

- да бъде непрекъснатата;
- да бъде тъждествено 0 за $t \in (-\infty; x_1)$ и $t \in (x_3; \infty)$.

Ние вече знаем, че разделената разлика на дадена функция дава такава линейна комбинация. Нея ще използваме като дефиниция за търсените от нас базисни сплайни.

Определение 10. Разделената разлика на отсечената степенна функция $(x - t)_+^{r-1}$ по отношение на x в точките x_0, \dots, x_r се нарича B -сплайн (Basis spline) от степен $r - 1$ с възли x_0, \dots, x_r . Последната ще означаваме с:

$$B(x_0, \dots, x_r; t) = (x - t)_+^{r-1}[x_0, \dots, x_r].$$



Да припомним, че изведохме аналитична формула за разделената разлика, която за функцията $f(x) = (x - t)_+^{r-1}$ изглежда така:

$$B(x_0, \dots, x_r; t) = (x - t)_+^{r-1}[x_0, \dots, x_r] = \sum_{k=0}^r \frac{(x_k - t)_+^{r-1}}{\omega'(x_k)}. \quad (8.1)$$

И така, всеки B -сплайн е линейна комбинация на отсечени степенни функции и следователно е сплайн. От горната дефиниция следва, че за да определим B -сплайн от първа степен ни трябва три възела; за B -сплайн от втора степен ни трябва четири възела и т.н. Броят на възлите на всеки базисен сплайн е с две повече от степента му. В сила е и следната теорема:

Теорема 14. За B -сплайна от степен $r - 1$ с възли x_0, \dots, x_r е в сила:

- (а) $B(x_0, \dots, x_r; t) = 0$ за всяко $t \leq x_0$ и всяко $t \geq x_r$;
- (б) $B(x_0, \dots, x_r; t) > 0$ при $t \in (x_0, x_r)$,

за всяко $r \geq 1$.

Интервалът, в който една функция е различна от нула, се нарича **носител**. Следователно B -сплайнът $B(x_0, \dots, x_r; t)$ има краен носител (x_0, x_r) .

Всеки сплайн от определена степен $r - 1$ може да се представи в даден фиксиран интервал като линейна комбинация от базисни сплайни (B -сплайни) от същата степен. Предимството на този базис е, че всяка от функциите има минимален носител – тя е ненулева само в интервала определен от възлите ѝ. Следователно, за да пресметнем стойността на сплайна в дадена точка, трябва да вземем предвид само r на брой базисни сплайна, т.е. толкова колкото е размерността на пространството π_r (локално сплайните съвпадат с полиноми). Да обърнем внимание, че:

- броят на възлите на всеки базисен сплайн е с две повече от степента му;
- за всеки избор на възлите полученият B -сплайн е единствен.

Задача 1. Да се пресметне $B(0, 1, 3; t)$.

Решение. Имаме $B(0, 1, 3; t) = (x - t)_+^1[0, 1, 3]$. От дефиницията за сплайн и горната теорема следва, че търсим базисния сплайн във вида:

$$B(0, 1, 3; t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ p_1(t), & 0 \leq t \leq 1, \\ p_2(t), & 1 \leq t \leq 3, \\ 0, & t \geq 3. \end{cases}$$

Трябва да определим полинома за $t \in [0, 1]$ и $[1, 3]$. За целта ще използваме дефиницията за B -сплайн. Да припомним, че

$$(x - t)_+^r = \begin{cases} (x - t)^r, & x \geq t, \\ 0, & x \leq t. \end{cases}$$

- $t \in [0, 1]$



Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$(0 - t)_+ = 0$	$1 - t$	
$x_1 = 1$	$(1 - t)_+ = 1 - t$	1	$\frac{t}{3}$
$x_2 = 3$	$(3 - t)_+ = 3 - t$		

- $t \in [1, 3]$

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$(0 - t)_+ = 0$	0	
$x_1 = 1$	$(1 - t)_+ = 0$	$\frac{3 - t}{2}$	$\frac{3 - t}{6}$
$x_2 = 3$	$(3 - t)_+ = 3 - t$		

Получихме

$$B(0, 1, 3; t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ t/3, & 0 \leq t \leq 1, \\ (3 - t)/6, & 1 \leq t \leq 3, \\ 0, & t \geq 3. \end{cases}$$

□

Задача 2. Покажете, че $\int_{x_0}^{x_r} B(x_0, \dots, x_r; t) dt = \frac{1}{r}$.

Доказателство. За да докажем твърдението, ще използваме дефиницията за B -сплайн, свойството (8.1) и твърдението за носителя на отсечената степенна функция.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_r} B(x_0, \dots, x_r; t) dt &= \int_{x_0}^{x_r} (x - t)_+^{r-1} [x_0, \dots, x_r] dt \stackrel{(8.1)}{=} \int_{x_0}^{x_r} \sum_{k=0}^r \underbrace{\frac{1}{\omega'(x_k)}}_{:=c_k} (x_k - t)_+^{r-1} dt \\ &= \int_{x_0}^{x_r} \sum_{k=0}^r c_k (x_k - t)_+^{r-1} dt = \sum_{k=0}^r c_k \int_{x_0}^{x_r} (x_k - t)_+^{r-1} dt = \sum_{k=0}^r c_k \left(\int_{x_0}^{x_k} (x_k - t)_+^{r-1} dt + \int_{x_k}^{x_r} (x_k - t)_+^{r-1} dt \right) \\ &= \sum_{k=0}^r c_k \int_{x_0}^{x_k} (x_k - t)^{r-1} dt = - \sum_{k=0}^r c_k \frac{(x_k - t)^r}{r} \Big|_{x_0}^{x_k} = \sum_{k=0}^r c_k \frac{(x_k - x_0)^r}{r} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^r c_k (x_k - x_0)^r \\ &= \frac{1}{r} \underbrace{(x - x_0)^r [x_0, \dots, x_r]}_{=1} = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

В последното използвахме, че разделената разлика от ред r е коефициента пред x^r в полинома $(x - x_0)^r$, т.е. е равна на 1. □

Обща задача за определяне на базис от B -сплайни и рекурентна връзка

Вече показахме как изглежда един B -сплайн. Нека сега разгледаме въпроса за намиране на базис от B -сплайни в дадено пространство от сплайни. Оттук нататък ще бележим $B_{i,r-1}(t) := B(x_i, \dots, x_{i+r}; t)$, $\forall i$. Първият индекс на B -сплайна съвпада с индекса на първия му възел, а вторият – със степента на сплайна. Да обърнем отново внимание, че броят на възлите е с два повече от степента му.



Задача 3. Да се докаже, че функциите $B_{i,1} = B(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; t)$, $i = 1, \dots, n$, са базис в пространството $S_1(x_3, \dots, x_n)$ в интервала $[a, b]$, където $x_1 < x_2 = a < x_3 < \dots < x_n < x_{n+1} = b < x_{n+2}$.

Решение. Искаме да покажем, че B -сплайните

$$B(x_1, x_2, x_3; t), B(x_2, x_3, x_4; t), \dots, B(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}; t)$$

образуват базис в $[a, b]$, т.е. са линейно независими в интервала $[a, b]$. Да допуснем противното. Нека

$$f(t) = \alpha_1 B_{1,1}(t) + \alpha_2 B_{2,1}(t) + \dots + \alpha_n B_{n,1}(t) = 0, \text{ за някое } \alpha_k \neq 0, \forall t \in [a, b].$$

Тъй като $B_{k,1}(x_2) = 0$, $k = \overline{2, n}$, то следва, че $f(x_2) = f(a) = \alpha_1 \underbrace{B_{1,1}(a)}_{\neq 0} = 0$. Последното влече

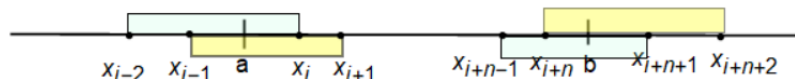
$\alpha_1 = 0$. Постъпваме аналогично и за възлите x_3, \dots, x_{n+1} , откъдето $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ и достигаме до противоречие. Следователно $B_{i,1}(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$, $i = \overline{1, n}$, образуват базис на пространството $S_1(x_3, \dots, x_n)$. \square

Последната задача е частен случай на общата теорема за произволно пространство от сплайн-функции, доказана на лекции.

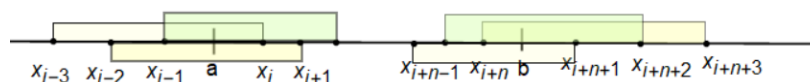
Теорема 15. Нека са дадени възли $x_1 < \dots < x_r \leq a$, $a < x_{r+1} < \dots < x_n < b$ и $b \leq x_{n+1} < \dots < x_{n+r}$. Тогава B -сплайните $B(x_1, \dots, x_{1+r}; t), \dots, B(x_n, \dots, x_{n+r}; t)$ образуват базис в пространството $S_{r-1}(x_{r+1}, \dots, x_n)$.

За да разберем по-добре горната теорема, нека разгледаме следните фигури.

- Нека x_i е първият възел в интервала $[a, b]$. За сплайните от първа степен в интервала $[a, x_i]$ трябва да има два B -сплайна, които да са различни от 0, за да определят съответния полином от първа степен. Това са $B(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i; t)$ и $B(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; t)$, чиито носители са заштриховани съответно със синьо и жълто на долната фигура. Затова вземаме два възела преди a . Аналогично трябва да вземем два възела след b .



- За квадратичните сплайни в интервала $[a, x_i]$ трябва да има три B -сплайна, които са различни от 0 в него и определят съответния полином от втора степен. Техните носители са заштриховани на долната фигура. Следователно трябва да вземем три възела преди a и аналогично три след b .



Изобщо казано, за да определим сплайни от $(r-1)$ -ва степен в интервала $[a, b]$, трябва да вземем редица от B -сплайни, отговаряща на възли, които започват r възела преди a и завършват r възела след b . Оказва се, че за B -сплайните съществува и удобна рекурентна връзка, с която да бъдат пресметнати.



Теорема 16. За всяко $r \geq 2$ и $t \in (-\infty, \infty)$ е в сила равенството

$$B_{i,r-1}(t) = \frac{t - x_i}{x_{i+r} - x_i} B_{i,r-2}(t) + \frac{x_{i+r} - t}{x_{i+r} - x_i} B_{i+1,r-2}(t),$$

където

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} \frac{1}{x_{i+1} - x_i}, & t \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, & t \notin [x_i, x_{i+1}). \end{cases}$$

Забележка: Да обгърнем внимание, че така дефинирано $B_{i,0}$ е по части константа.

Задача 4. Като използвате рекурентната връзка, изведете явния вид на $B(0, 1, 2, 3; t)$.

Решение. Ще използваме рекурентната връзка, за да получим В-сплайна от втора степен с възли 0, 1, 2 и 3:

$$B(0, 1, 2, 3; t) = \frac{t - 0}{3 - 0} B(0, 1, 2; t) + \frac{3 - t}{3 - 0} B(1, 2, 3; t).$$

С помощта на рекурентната връзка сведохме задачата до задача за определяне на съответните В-сплайни от първа степен (т.е. с една степен по-малко). Аналогично:

$$B(0, 1, 2; t) = \frac{t - 0}{2 - 0} B(0, 1; t) + \frac{2 - t}{2 - 0} B(1, 2; t);$$

$$B(1, 2, 3; t) = \frac{t - 1}{3 - 1} B(1, 2; t) + \frac{3 - t}{3 - 1} B(2, 3; t).$$

Тъй като $B(0, 1; t)$, $B(1, 2; t)$, $B(2, 3; t)$ имат различен носител, то ще разгледаме поотделно всеки един от интервалите, определен от възлите.

- $t \in [0, 1]$

$$B(0, 1; t) = \frac{1}{1 - 0} = 1, \quad B(1, 2; t) = 0, \quad B(2, 3; t) = 0.$$

- $t \in [1, 2]$

$$B(0, 1; t) = 0, \quad B(1, 2; t) = \frac{1}{2 - 1} = 1, \quad B(2, 3; t) = 0.$$

- $t \in [2, 3]$

$$B(0, 1; t) = 0, \quad B(1, 2; t) = 0, \quad B(2, 3; t) = \frac{1}{3 - 2} = 1.$$

Заместваем последните последователно в рекурентната връзка и получаваме:

$$B(0, 1, 2, 3; t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{t}{3} \cdot \frac{t}{2} + \frac{3-t}{3} \cdot 0 = \frac{t^2}{6}, & t \in [0, 1], \\ \frac{t}{3} \cdot \frac{2-t}{2} + \frac{3-t}{3} \cdot \frac{t-1}{2} = \frac{-2t^2 + 6t - 3}{6}, & t \in [1, 2], \\ \frac{t}{3} \cdot 0 + \frac{3-t}{3} \cdot \frac{3-t}{3-1} = \frac{t^2 - 6t + 9}{6}, & t \in [2, 3], \\ 0, & t \geq 3. \end{cases}$$

□



Допълнителни задачи

Задача 5. Да се намери явният вид на $B(0, 2, 3; t)$.

Задача 6. Да се намери явният вид на $B(-2, 0, 1; t)$.

Задача 7. Да се намери явният вид на $B(1, 4, 5; t)$ за $t \in [1, 5]$.

