Записки към упражненията по Числени методи
сп. Информатика

ас. Здравка Иванова
гл. ас. д-р Тихомир Иванов

Записките са развити в съответствие със съдържанието на упражненията
по Числени методи към курса на доц. д-р Лозко Милев

Съдържание

Увод

В курсовете по математика досега сме разгледали различни задачи и начини за тяхното решаване, например решаване на уравнения и системи алгебрични уравнения, решаване на диференциални уравнения, пресмятане на производни и интеграли, търсене на максимуми и минимуми на функции и др. Винаги досега целта ни е била да се намери „аналитичен” подход, който да ни води до точното решение на задачата – числото, което превръща алгебричното уравнение във вярно числово равенство; функцията, която превръща диференциалното уравнение в тъждество и т.н. Разгледали сме различни начини за решаване на всяка от споменатите задачи. За съжаление обаче тези начини ни позволяват да решаваме много ограничен клас от задачи. Например можем да пресмятаме таблични интеграли, интеграли от рационални функции и още няколко класа интеграли, но останалите не могат да бъдат решени точно. Можем да решаваме линейни ОДУ, уравнения с разделящи се променливи и още няколко класа уравнения, но останалите не могат да се решат с познатите аналитични техники. Последното е в сила на практика за всеки клас математически задачи, с които бихме се сблъскали.

От друга страна, в практиката рядко имаме късмета да срещнем точно задача, за която стандартните аналитични техники вършат работа. Нека направим малко отклонение и да коментираме защо по принцип в практиката се налага решаването на математически задачи и така ще се уверим, че едва ли те ще попаднат в тези класове, за които аналитичните техники са използваеми. Математиката е езикът, на който се описват процесите от света около нас. За да изучим даден реален процес или да решим дадена практическа задача, ние трябва да определим кои са основните характеристики, които ги описват – това са някакви величини, които дават информация за съответния процес (например време, скорост, температура, сила, бързодействие на алгоритъм, компресия на данни и др.). Величините се измерват в дадени мерни единици, т.е. им се съпоставят някакви числени стойности. Изучавайки даден процес, ние искаме да изучим зависимостите между величините, които го описват. На езика на математиката зависимостта между две и повече величини се нарича функция. С други думи ние описваме зависимостите около нас посредством функции. Често тези функции не могат да бъдат зададени явно. За тях е известно само какви закономерности удовлетворяват. Тоест се задават като решенията на диференциални уравнения. Ясно е, че работата с функции и тяхното изследване (съответно изучаването на съответните реални процеси) е пряко свързано с необходимостта от пресмятането на производни (основна характеристика на функцията/съответния процес – скоростта ѝ на изменение в дадената точка) и интеграли. Налагането на условия, които искаме да са удовлетворени, се описва математически посредством уравнения и т.н.

И така, няма причина да смятаме (и реалността показва, че случаят не е такъв!), че ако описваме един произволен реален процес, то математическите задачи, които възникват, ще са от този ограничен набор случаи, за които аналитичните техники дават резултат. Но всъщност точно тези – реалните задачи, ние имаме нужда да решим. Оказва се обаче, че, независимо че не можем да ги решим точно, **в много случаи можем да ги решим поне приближено (да намерим апроксимация) с достатъчно висока за нашите цели точност.** Настоящият курс ще е именно посветен на въпроса за приближеното решаване на редица класове математически задачи. Нещо повече, ще разглеждаме **техники, които ни позволяват да намираме приближения само с помощта на тези операции, които компютърът може да извършва – аритметичните операции**. Такива техники носят събирателното наименование **числени методи**.

В настоящия курс ние ще се занимаем с въпроса за приближаването на:

- функции – функцията е фундаменталният обект, който описва зависимостите между величините от заобикалящия ни свят, затова е съвсем естествено да отделим сериозно внимание на работата с тях. Необходимостта от приближаването дори на функции, които приемаме за съвсем естествени, става съвсем очевидна, ако се опитаме да пресметнем например $\sin 0.23$. Веднага можем да се уверим, че всъщност дори „най-простите” функции не са толкова прости и е добре да можем да ги приближим с „още по-прости”;

- производни и интеграли – след като можем да приближаваме функции, ще се научим приближено да извършваме и основните операции с тях;

- решаване на нелинейни алгебрични уравнения – макар да решаваме такива още от училище, лесно можем да се уверим, че дори едно полиномиално уравнение

  $$x^5 - 4x^3 + 2x^2 + x - \sqrt{2} = 0$$

  не може да бъде решено, какво остава за по-сложни уравнения.

Нека все пак споменем, за да не остане читателят с погрешно впечатление, че аналитичните методи са също много важни! От една страна, те ни позволяват да извеждаме, както ще видим, числени алгоритми. От друга страна, те позволяват да се получат точни резултати за някои прости случаи, които дават обща (качествена) информация за разглеждания процес, а могат да служат и като база за сравнение (англ., *benchmark*), по която да се оценяват числените методи.

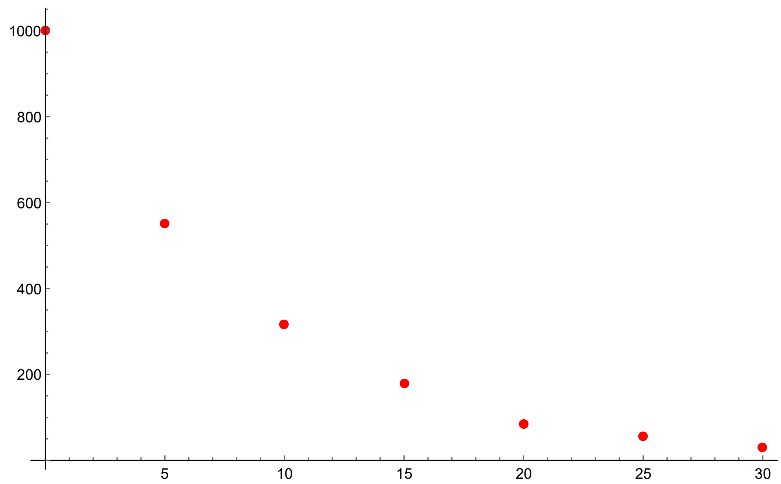
Глава 1

Интерполационна задача на Лагранж

Вече казахме, че когато искаме да опишем даден процес, то ние трябва да намерим някаква връзка между величините, които го характеризират (температура, налягане, време, скорост и т.н.). Това става на база на някакви направени експерименти, които ни позволяват да извлечем информация за този процес и величините, от които се интересуваме. Естествено е на езика на математиката връзката между направените измервания да я търсим под формата на някаква функция, да съставим уравнение, система уравнения и т.н. Да разгледаме два прости примера.

Пример 1. Дадени са измервания за количество лекарство в организма на човек, намаляващо с времето:

часове след приемане	0	5	10	15	20	25	30
кол. лекарство (mg)	1000	550	316	180	85	56	31



Да се намери функция, която описва количеството лекарство в организма на човека. Използвайте я, за да определите количеството лекарство в организма след 13 часа.

Пример 2. Да се намери приближено стойността на $\cos x$ в 0.739, като се използва таблицата с точни стойности:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Приближението да се направи, като се намери по-проста функция, която приема същите стойности като тези в таблицата.

В общия случай разглеждаме задачата за намиране на функция, чиято графика минава през дадени точки и чиято стойност в тези точки може (лесно) да бъде пресметната. Ще казваме, че намерената функция **интерполира** съответните данни. Задачата за намиране на такава функция ще наричаме **интерполационна задача**.

Забележка: Ако дадените точки са стойности на дадена функция, то функцията, чиято графика минава през същите точки, ще бъде приближена на дадената.

И така, следва да си зададем следните въпроси:

- как да намерим „достатъчно хубава” функция, която да минава през дадените точки?
- можем ли да оценим приближението, т.е. да определим точността на апроксимацията, която сме направили?

Най-естествените функции, към които можем да се обърнем, са алгебричните полиноми. Както знаем, те са много удобни, защото с тях можем лесно да извършваме алгебрични действия – събиране, изваждане, умножение, деление, пресмятане на полинома в дадена точка и др. Оттук нататък пространството от алгебрични полиноми от степен, ненадминаваща n, ще означаваме с π_n. Например пространството от алгебрични полиноми от степен ≤ 2 ще означаваме с π_2. Последното пространство включва полиномите от нулева, първа и втора степен. И така, сега ще се спрем на общата постановка на задачата за намиране на алгебричен полином, чиято графика минава през дадени точки.

Постановка на задачата на Лагранж

Нека са дадени **различни** точки (възли) $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и съответни стойности $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Търсим полином $p(x) \in \pi_n$ (т.е. от степен $\leq n$), който удовлетворява интерполационните условия

$$\begin{aligned} p(x_0) &= y_0, \\ p(x_1) &= y_1, \\ &\vdots \\ p(x_n) &= y_n \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad p(x_i) = y_i, i = \overline{0,n}. \tag{1.1}$$

Преди да се опитаме да намерим явния вид на този полином, нека се спрем на въпроса за съществуването и единствеността му. Когато решаваме една задача, е важно да знаем дали тя има и то единствено решение. Например ако е даден някакъв алгоритъм, ние искаме след като го реализираме да знаем, че сме получили коректно решение и то е решението, което търсим. В курса по Числени методи често ще се спираме на този въпрос.

Ясно е, че полиномът, който търсим, има вида

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Един начин да го определим е просто да решим получената система

$$\left| \begin{aligned} & a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0, \\ & a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1, \\ & \quad \vdots \\ & a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n. \end{aligned} \right.$$

Да я запишем във векторно-матрична форма:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

От линейната алгебра знаем, че системата има единствено решение $\Leftrightarrow detA \neq 0$. Последната матрица е известната матрица на Вандермонд. Може да се покаже, че тя е обратима тогава и само тогава, когато възлите в нея са различни, т.е. $x_i \neq x_j$ за $i \neq j, i, j = \overline{0, n}$. Тъй като в постановката на Лагранж, която разглеждаме, възлите са различни по условие, то тогава задачата за намиране на интерполационния полином ще има и то единствено решение при всеки избор на **различни** възли.

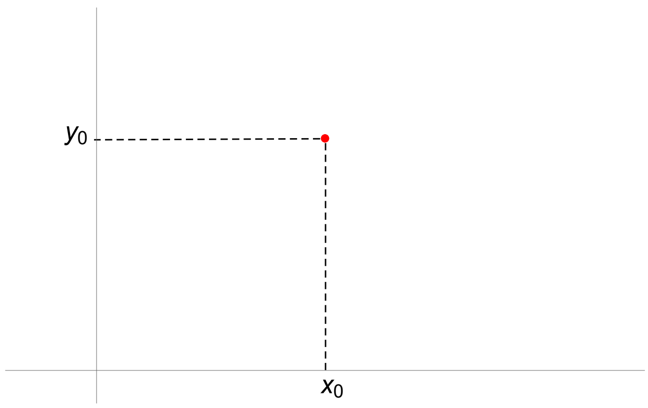
И така, съществува и то единствен полином от π_n, интерполиращ таблицата

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Да обърнем внимание, че за да определим един полином $p(x) \in \pi_n$ трябва да намерим коефициентите в неговото представяне $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Последната интерполационна таблица задава точно $n+1$ условия, колкото е и броят на неизвестните коефициенти.

Нека преди да продължим да разгледаме няколко частни случая за броя на интерполационните условия в интерполационната задача на Лагранж. Целта е да илюстрираме зависимостта на полинома от разположението на точките $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

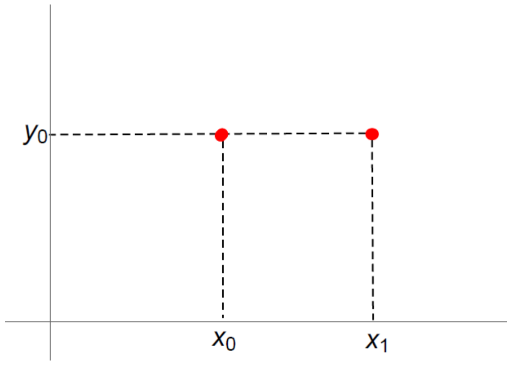
- 1 условие: графиката на полинома да минава през точката (x_0, y_0)



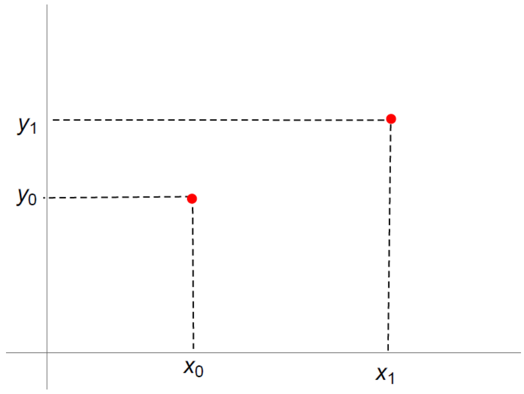
Търсим полином от π_0 (т.е. константа), чиято графика минава през точката (x_0, y_0). Очевидно $p(x) \equiv y_0$.

- 2 условия: графиката на полинома да минава през точките $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$

В този случай степента на полинома ще зависи от разположението на точките, които са дадени:



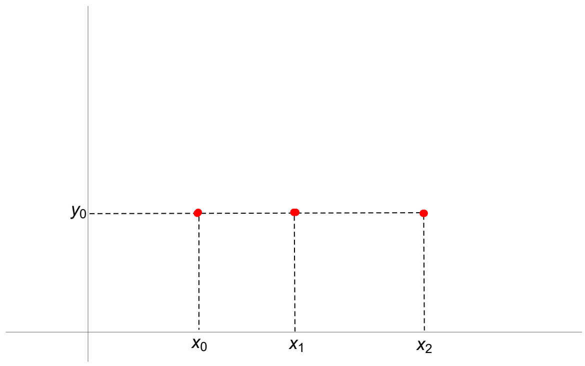
(а) Ако $y_0 = y_1$, то полиномът, който интерполира двете точки, ще е от нулева степен ($p(x) \equiv y_0$).



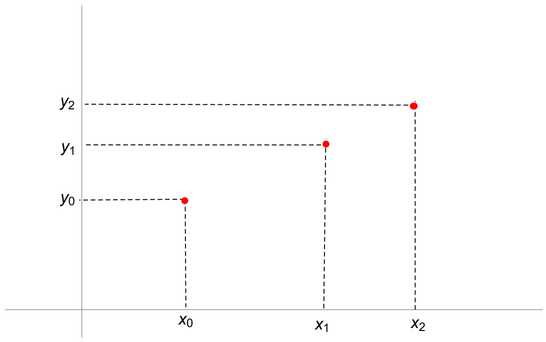
(б) Ако $y_0 \neq y_1$, то полиномът, който интерполира двете точки, ще е от първа степен.

- 3 условия: графиката на полинома да минава през точките $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$

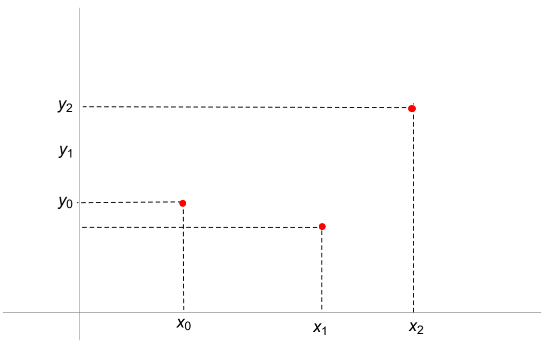
  В този случай полиномът, който търсим, е от π_2, което означава, че в зависимост от разположението на точките, той ще бъде от нулева, първа или втора степен:



(а) Интерполационният полином е от нулева степен.



(б) Интерполационният полином е от първа степен.



(в) Интерполационният полином е от втора степен.

1.1 Интерполационна формула на Лагранж

Както вече казахме, интерполационния полином, решение на (1.1), можем да определим като просто решим получената система. Когато решаваме дадена задача обаче е хубаво да можем да я решим по няколко различни начина. За задачата на Лагранж съществуват няколко аналитични формули, по които можем да определим съответния единствен полином. Най-напред ще разгледаме така наречената **интерполационна формула на Лагранж**.

Твърдение 1. Полиномът $p(x)$, удовлетворяващ (1.1), се представя по формулата

$$p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x), \tag{1.2}$$

където $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ са полиноми от степен точно n и удовлетворяват условията

$$\begin{aligned}
&l_0(x_0) = 1,\ l_0(x_1) = 0,\ l_0(x_2) = 0, \ldots,\ l_0(x_n) = 0,\\
&l_1(x_0) = 0,\ l_1(x_1) = 1,\ l_1(x_2) = 0, \ldots,\ l_1(x_n) = 0,\\
&\quad\vdots\\
&l_n(x_0) = 0,\ l_n(x_1) = 0,\ l_n(x_2) = 0, \ldots,\ l_n(x_n) = 1
\end{aligned} \tag{1.3}$$

или записано еквивалентно

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad k, i = \overline{0, n}.$$

Лесно можем да проверим, че ако изберем полиномите $l_k(x), k = \overline{0, n}$, в (1.2) така, че да изпълняват условията (1.3), то $p(x)$ ще удовлетворява условията (1.1). Наистина

$$\begin{aligned}
p(x_0) &= y_0 l_0(x_0) + y_1 l_1(x_0) + \cdots + y_n l_n(x_0) = 1y_0 + 0y_1 + \cdots + 0y_n = y_0,\\
p(x_1) &= y_0 l_0(x_1) + y_1 l_1(x_1) + \cdots + y_n l_n(x_1) = 0y_0 + 1y_1 + \cdots + 0y_n = y_1,\\
&\ \vdots\\
p(x_n) &= y_0 l_0(x_n) + y_1 l_1(x_n) + \cdots + y_n l_n(x_n) = 0y_0 + 0y_1 + \cdots + 1y_n = y_n.
\end{aligned}$$

Последното твърдение ни казва, че ако искаме да определим полинома $p(x)$ по формулата на Лагранж, трябва да определим базисните полиноми на Лагранж, така че те да удовлетворяват условията (1.3). За тях са в сила формулите:

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)},\\
l_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)},\\
&\ \vdots\\
l_k(x) &= \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)},\\
&\ \vdots\\
l_n(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}
\end{aligned}$$

или записано по-удобно

$$l_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

И така, за интерполационния полином е в сила **интерполационната формула на Лагранж:**

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Забележка: Проверете сами, че условията (1.3) са в сила за така построените базисни полиноми! Понякога, за да подчертаем степента на полиномите $l_k(x)$, ще използваме означението $l_{kn}(x)$ (k-тият базисен полином е от n-та степен).

Нека сега решим два примера за определяне на интерполационния полином по формулата на Лагранж.

Задача 1. Да се намери полином от степен, ненадминаваща 2, който интерполира данните

x	1	3	5
y	2	4	6

като се използва интерполационната формула на Лагранж.

Решение. Търсим $p(x) \in \pi_2$ във вида

$$p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x).$$

От горната формула за базисните полиноми на Лагранж имаме:

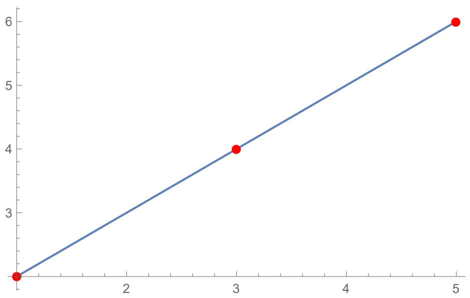
$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)} = \frac{(x-3)(x-5)}{8}, \\
l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-5)}{(3-1)(3-5)} = -\frac{(x-1)(x-5)}{4}, \\
l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{8}.
\end{aligned}$$

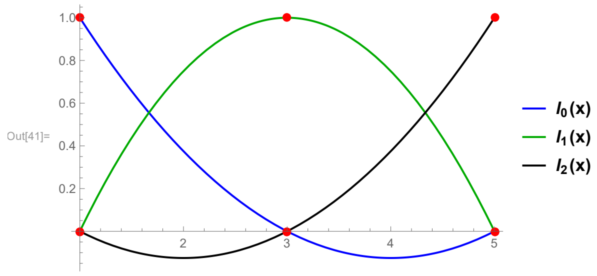
Заместваме последните във формулата на Лагранж и получаваме

$$\begin{aligned}
p(x) &= y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) \\
&= 2\frac{(x-3)(x-5)}{8} + 4\left(-\frac{(x-1)(x-5)}{4}\right) + 6\frac{(x-1)(x-3)}{8} = x+1.
\end{aligned}$$

Забележка: След като намерите полинома на Лагранж, е добре да направите проверка дали той удовлетворява интерполационните условия от задачата, за да проверите дали не сте сбъркали при пресмятането.

На следващите две графики са дадени точките и интерполационният полином, както и съответните базисни полиноми.





От графиките на базисните полиноми ясно се вижда, че те наистина изпълняват условията (1.3). □

Ако стойностите $y_0, y_1, \ldots, y_n$ са стойности на някоя функция $f(x)$ в точките $x_0, x_1, \ldots, x_n$, ще казваме, че полиномът интерполира функцията f и ще го бележим с $L_n(f;x)$ (интерполационен полином на Лагранж от степен n за функцията f). Тогава е в сила формулата

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_{kn}(x).$$

Задача 2. Дадена е функцията $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Да се намери полиномът от π_3, който интерполира $f(x)$ в точките $-0.5, 0, 0.5, 1$. Да се използва последният, за да се пресметне приближено стойността на f в точките $\pm 2/3$. Да се пресметне грешката между точната и приближената стойност.

Решение. Да запишем интерполационната таблица, отговаряща на условието в задачата:

x	-0.5	0	0.5	1
$f(x)$	2	1	$2/3$	$1/2$

Имаме

$$L_3(f;x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x).$$

Намираме базисните полиноми

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-0)(x-0.5)(x-1)}{(-0.5-0)(-0.5-0.5)(-0.5-1)}, \\
l_1(x) &= \frac{(x+0.5)(x-0.5)(x-1)}{(0+0.5)(0-0.5)(0-1)}, \\
l_2(x) &= \frac{(x+0.5)x(x-1)}{(0.5+0.5)(0.5-0)(0.5-1)}, \\
l_3(x) &= \frac{(x+0.5)(x-0)(x-0.5)}{(1+0.5)(1-0)(1-0.5)}
\end{aligned}$$

и ги заместваме във формулата на Лагранж:

$$L_3(f;x) = 2l_0(x) + 1l_1(x) + \frac{2}{3} l_2(x) + \frac{1}{2} l_3(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{7}{6}x + 1.$$

(Проверете самостоятелно, че така намереният $L_3(f;x)$ удовлетворява интерполационните условия!)
Да пресметнем $f(\pm 2/3)$ и $L_3(f;\pm 2/3)$. Имаме

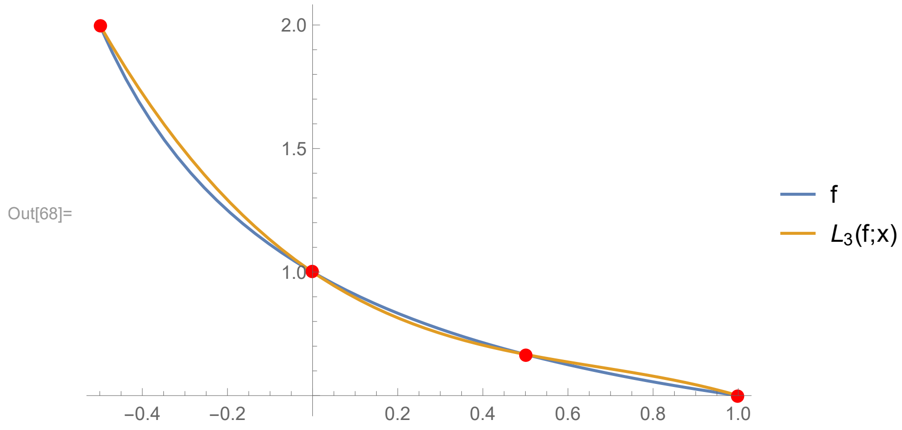
$$f(-2/3) = 3, \quad L_3(f;-2/3) = 208/81, \quad f(2/3) = 3/5, \quad L_3(f;2/3) = 50/81.$$

Тогава за грешката в двете точки имаме

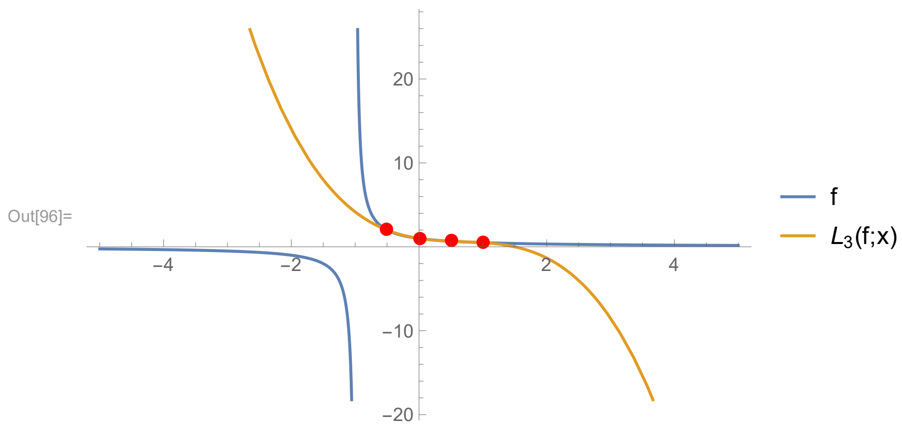
$$f(-2/3) - L_3(f;-2/3) = 35/81 \approx 0.432099, \quad f(2/3) - L_3(f;2/3) = -7/405 \approx -0.017284.$$

Да обърнем внимание, че грешката в точката $-2/3$ е по-голяма от тази в $2/3$. Последното е пряко свързано с факта, че $-2/3$ е извън интервала на интерполация (т.е. между първия и последния възел).

Нека отново видим графиката на функцията и интерполационния ѝ полином в интервала на интерполация:

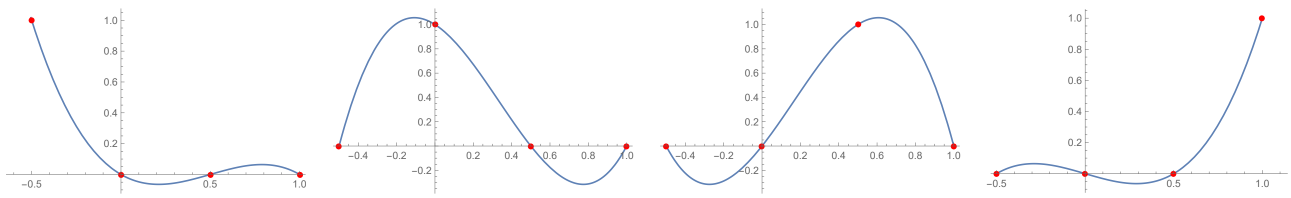


От графиката се вижда, че в интервала на интерполация $[-0.5, 1]$ полиномът $L_3(f; x)$ приближава добре функцията $f(x)$. Нека сега разгледаме двете графики в по-голям интервал, например $[-5, 5]$.



В този пример съвсем ясно се вижда, че при използване на интерполационния полином грешката от приближение е по-малка в интервала на интерполация, отколкото извън него. Използването на интерполационния полином, за да се пресметнат приближени стойности на функцията f извън интервала на интерполация се нарича **екстраполация**. За да не се налага екстраполация, е важно възлите да се избират подходящи за нашите цели (ако това е възможно).

Преди да продължим, да илюстрираме съответните базисни полиноми на Лагранж и в този случай.



$\square$

Интересен случай за задачата на Лагранж е когато функцията, която интерполираме, също е полином. Разбира се, ако са дадени $n+1$ интерполационни точки, а функцията $f \in \pi_m, m > n$, то тогава приближаваме полинома f с интерполационен полином от по-ниска степен (съответно π_n). Нека сега покажем, че ако f също е от π_n, то $f \equiv L_n(f;x)$. Този факт, макар и очевиден, има много сериозни следствия в теорията на числените методи.

Задача 3. Да се покаже, че ако $f \in \pi_n$, то $L_n(f;x) \equiv f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, каквито и да са възлите на интерполация $\{x_k\}_{k=0}^n, x_k \neq x_i$ за $i \neq k$.

Доказателство. Нека за определеност са дадени различни възли $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Да разгледаме разликата (грешката)

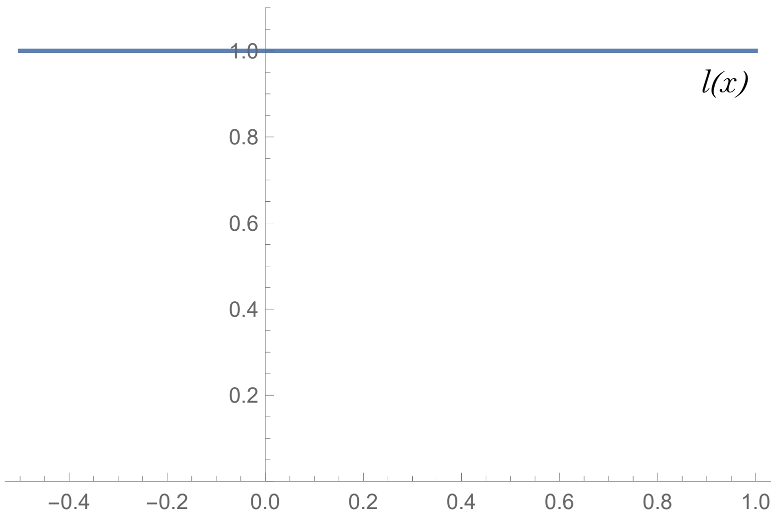
$$R(x) = f(x) - L_n(f;x).$$

Последното очевидно е от π_n. Освен това

$$R(x_i) = f(x_i) - L_n(f;x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0, i = \overline{0,n}.$$

Получихме, че $R(x)$ е полином от степен, ненадминаваща n, и освен това има $n+1$ нули. От последното следва, че $R(x) \equiv 0$, т.е. $f(x) \equiv L_n(f;x), \forall x$. □

Следващите няколко задачи имат за цел да илюстрират и затвърдят това важно свойство. Ще използваме последната задача, за да покажем едно интересно свойство на базисните полиноми на Лагранж. Може да се покаже, че сумата на базисните полиноми на Лагранж е единица във всяка точка x (проверете например за задача 1 като опростите израза). Действително, графиката на сумата на базисните полиноми за задача 2 е



Фигура 1.4: Графика на полинома $l(x) = \sum_{i=0}^{2} l_i(x)$.

Оказва се, че последното е вярно за всяка интерполационна задача на Лагранж (т.е. за всеки избор на възлите и степента n).

Задача 4. Нека $l_{kn}(x), k = \overline{0,n}$, са базисните полиноми на Лагранж, съответни на възлите $x_0, \ldots, x_n$. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{n} l_{kn}(x) = 1, \forall x.$$

Доказателство. Да припомним, че

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_{kn}(x), \forall x.$$

От условието на задачата се вижда, че лявата част се получава за $f(x) \equiv 1$. Тъй като $f(x) \equiv 1 \in \pi_n$, то от задача 3 следва, че $f(x) \equiv L_n(f;x)$. Имаме $L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_{kn}(x) \overset{f(x_k)=1}{\equiv} \sum_{k=0}^{n} l_{kn}(x)$ и следователно $\sum_{k=0}^{n} l_{kn}(x) \equiv 1, \forall x$, което трябваше да докажем. □

Задача 5. Да се докаже, че $\sum_{k=0}^{n} x_k^m l_{kn}(x) = x^m$, $m = \overline{0,n}$.

Доказателство. Ще постъпим аналогично на предходната задача.

Да изберем функцията, която интерполираме да бъде $f(x) \equiv x^m, m = \overline{0,n}$. Отново от задача 3 следва, че $f(x) \equiv L_n(f;x)$. Заместваме във формулата на Лагранж и получаваме:

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^{n} x_k^m l_{kn}(x) \equiv x^m, \forall x,$$

което трябваше да докажем. □

Задача 6. Да се докаже, че $\sum_{k=0}^{n} (x - x_k)^m l_{kn}(x) = 0$, $m = \overline{1,n}$.

Доказателство. Разглеждаме функцията $f(t) = (x-t)^m$, където x е някакво фиксирано число. Тъй като $f(t) \in \pi_n$, за $m = \overline{0,n}$, то функцията f съвпада с интерполационния си полином $L_n(f;t)$. Заместваме във формулата на Лагранж за интерполационни възли $x_0, \ldots, x_n$ и получаваме

$$L_n(f;t) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_{kn}(t) = \sum_{k=0}^{n} (x - x_k)^m l_{kn}(t) \equiv (x-t)^m, \ \forall t, \ m = \overline{1,n}.$$

Тъй като последното е в сила за всяко t, то нека изберем $t = x$. Заместваме и получаваме исканото тъждество

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} (x - x_k)^m l_{kn}(t) \equiv (x-x)^m \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} (x - x_k)^m l_{kn}(x) = 0, \ m = \overline{1,n}.$$

□

Преди да продължим, нека запишем интерполационната формула на Лагранж в по-удобен вид. Въвеждаме означението $\omega(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n)$. Да изразим базисните полиноми на Лагранж чрез $\omega(x)$. Имаме

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}.$$

Лесно се вижда, че са в сила следните тъждества

$$(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n) = \frac{\omega(x)}{x-x_k},$$

$$(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n) = \omega'(x_k).$$

От последните две следва, че $l_k(x) = \dfrac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}$ и за интерполационния полином на Лагранж е в сила формулата

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}. \tag{1.4}$$

Коментар: В последната формула се вижда, че дясната страна е недефинирана за $x = x_k$. Тъй като $L_n(f;x)$ е непрекъсната функция за всяко x (полином от π_n), то (1.4) в точката $x = x_k$ би следвало да се интерпретира като граничен преход при $x \to x_k$, т.е.

$$L_n(f;x_k) = \lim_{x \to x_k} \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}.$$

Допълнителни задачи

Задача 7. Като използвате интерполационната формула на Лагранж, намерете полинома $p \in \pi_2$, който удовлетворява условията $p(-1) = -1/2,\ p(1) = 1,\ p(2) = 3$. Представете $p(x)$ по степените на x.

Задача 8. Като се използва интерполационната формула на Лагранж, да се намери полином от степен, ненадминаваща 2, който интерполира данните

x	-2	0	1
y	3	1	3

Задача 9. Като използвате интерполационната формула на Лагранж, намерете полинома $p \in \pi_1$, който интерполира функцията $f(x) = \sin \dfrac{x}{2}$ във възлите 0 и $\pi/2$. Използвайте получения полином, за да намерите приближено стойността на $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Задача 10. Като използвате интерполационната формула на Лагранж, намерете полинома $p \in \pi_2$, който интерполира функцията $f(x) = 3^x$ във възлите 0, 1 и 2. Използвайте получения полином, за да намерите приближено стойността на $3^{1.2}$.

Задача 11. Като се използва интерполационната формула на Лагранж, без да се разкриват скобите, да се опрости изразът

$$-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-2)(x-3) - \frac{3}{2}x(x-1)(x-3) + \frac{2}{3}(x-1)(x-2)x.$$

Задача 12. Нека са дадени различни интерполационни възли $x_0, x_1, \dots, x_n$ и са построени съответните им базисни полиноми $l_{kn}(x)$. Да се докаже равенството

$$\sum_{k=0}^{n} (x-x_k)^{n+1} l_{kn}(x) = (-1)^n (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$$

1.2 Теорема за оценка на грешката за интерполационната задача на Лагранж

Досега показахме как можем да намерим алгебричен полином от степен $\leq n$, който интерполира дадени точки $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$. Последният може да бъде намерен аналитично, като се използва формулата на Лагранж:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x).$$

Полинома може да използваме, за да намерим приближено стойността на функция f в някаква точка x от интервала на интерполация $[x_0, x_n]$ (или евентуално извън него – екстраполация). Интересен и изключително важен е въпросът каква всъщност грешка сме направили, като сме използвали този полином вместо функцията f. Оказва се, че (вж. лекции) грешката може да бъде изведена аналитично и е в сила следната **теорема за оценка на грешката при интерполационната задача на Лагранж**.

Теорема 1. Нека $[a, b]$ е даден краен интервал и точките $x_0, \ldots, x_n$ са **различни** точки в него. Нека още f има непрекъснати производни до ред $n+1$ включително в интервала $[a, b]$. Тогава за всяко x от $[a, b]$ $\exists$ число $\xi = \xi(x) \in [a, b]$ такова, че

$$f(x) - L_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n). \tag{1.5}$$

Преди да продължим, да обърнем внимание на няколко неща в горната теорема. Последната ни казва, че ако искаме да пресметнем грешката в някоя точка $x \in [a, b]$, то тя ще бъде точно равна на дясната страна в (1.5). Тъй като обаче за всяко x числото ξ е различно и освен това то на практика не може да се определи, последната теорема често се използва за намиране на някаква оценка на грешката (затова е и известна като **теорема за оценка на грешката**). Когато говорим за грешка, ние често няма да се интересуваме от нейния знак, т.е. дали надценяваме или подценяваме истинския резултат, а ще се интересуваме от това колко далеч се намираме от реалната стойност, т.е. ще разглеждаме грешката, взета по модул:

$$|f(x) - L_n(f; x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \right|.$$

От горното лесно се вижда, че ако можем да направим оценка отгоре на $(n+1)$-вата производна за $\xi \in [a, b]$, то можем да дадем оценка отгоре на грешката по модул за всяко $x \in [a, b]$. С други думи, ако $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M_{n+1}$, където $M_{n+1} \in \mathbb{R}$, то

$$|f(x) - L_n(f; x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \right|.$$

Нещо повече, ако поискаме да дадем оценка отгоре на грешката по модул за целия интервал $[a, b]$, е в сила

$$|f(x) - L_n(f; x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} \left| (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \right|.$$

Задача 1. Да се намери грешката, която се допуска при приближение на $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ в интервала $[0, 1]$ с интерполационния полином на Лагранж от първа степен с възли 0 и 1 и да се направи оценката на грешката (по модул) отгоре в $[0, 1]$:

(а) в произволна точка x;

(б) в целия интервал $[0, 1]$.

Решение. От теоремата за оценка на грешката имаме

$$R(x) := f(x) - L_1(f; x) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x - 0)(x - 1),$$

за някое $\xi \in [0,1]$. Да пресметнем втората производна

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3},$$

взета в точката ξ, и да я заместим по-горе. Имаме

$$R(x) = \frac{2}{2!(\xi+1)^3}\, x(x-1) = \frac{1}{(\xi+1)^3}\, x(x-1).$$

(а) Нека сега видим как изглежда оценката на грешката по модул за произволно x в интервала. Имаме

$$|R(x)| = \left|\frac{1}{(\xi+1)^3}\right| \; |x(x-1)|.$$

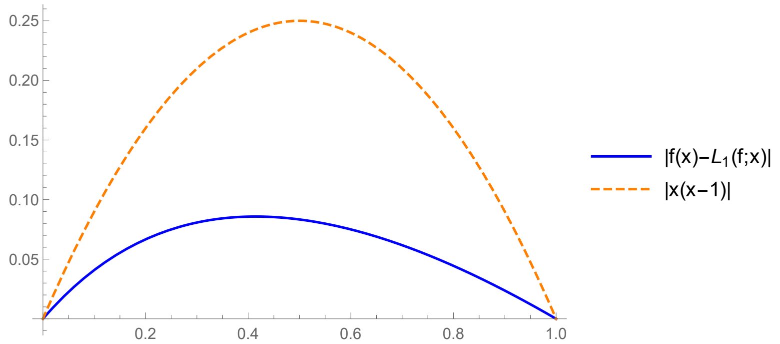
За $\xi \in [0,1]$ е в сила неравенството

$$\left|\frac{1}{(\xi+1)^3}\right| = \frac{1}{(\xi+1)^3} \leq \frac{1}{(1+0)^3} = 1,$$

което влече

$$|R(x)| = \left|\frac{1}{(\xi+1)^3}\right| |x(x-1)| \leq |x(x-1)|, \forall x \in [0,1]. \tag{1.6}$$

Неравенство (1.6) следва от факта, че $\dfrac{1}{(\xi+1)^3}$ има максимална стойност за $\xi \in [0,1]$ в точката $\xi = 0$. На практика полученото неравенство означава, че графиката на функцията на грешката, взета по модул, се мажорира от графиката на функцията $|x(x-1)|$.



Фигура 1.5: Графика на $|R(x)|$ и мажориращата я функция $|x(x-1)|$.

(б) Нека сега направим оценка отгоре за целия интервал $[0,1]$, т.е. да максимизираме по x оценката на грешката. С други думи, искаме да определим максималната стойност на $|x(x-1)|$ в интервала $[0,1]$. Последната функция очевидно има максимална стойност в точката $x = 1/2$, в която се намира върхът на параболата (максимумът може да се намери и като се вземат екстремалните точки на функцията в интервала). Следователно за всяко $x \in [0,1]$ имаме

$$|R(x)| \leq \left|\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\right| = \frac{1}{4}.$$

Да отбележим, че 1/4 е оценка на грешката отгоре. На практика тя не се достига (вж. Фиг. 1.5). $\square$

Задача 2. Нека е дадена функция f с непрекъснати производни до ред 2 включително в интервала $[x_0, x_1]$, т.е. $f \in C^2[x_0, x_1]$, където x_0, x_1 са интерполационни възли. Нека още е изпълнено $\max\limits_{x \in [x_0, x_1]} |f''(x)| = M$. Да се докаже, че при $x \in [x_0, x_1]$ е в сила

$$|f(x) - L_1(f; x)| \leq \frac{M}{8}(x_1 - x_0)^2.$$

Доказателство. От теоремата за оценка на грешката имаме

$$f(x) - L_1(f; x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1).$$

Да вземем по модул двете страни и да направим оценка отгоре:

$$|f(x) - L_1(f; x)| = \left| \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1) \right| = \frac{|f''(\xi)|}{2} |(x - x_0)(x - x_1)| \leq \frac{M}{2} |(x - x_0)(x - x_1)|.$$

И така, искаме да намерим максимума на функцията $|(x - x_0)(x - x_1)|$ по отношение на x. Последната отново достига максимума си в средата на интервала и следователно той е в т. $(x_0 + x_1)/2$. Заместваме в горната оценка и получаваме

$$|f(x) - L_1(f; x)| \leq \frac{M}{2} |(x - x_0)(x - x_1)| \leq \frac{M}{2} \left| \left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_0 \right) \left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_1 \right) \right| = \frac{M(x_1 - x_0)^2}{8}.$$

$\square$

Да повторим, че в общия случай, ако $\max\limits_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}, n = 0, 1, \ldots$ (т.е. $\max\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)| \leq M_1$, $\max\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)| \leq M_2$ и т.н.), то

$$|R_n(f; x)| = |f(x) - L_n(f; x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} |(x - x_0) \ldots (x - x_n)|.$$

Задача 3. Нека е дадена функцията $f(x) = \sqrt{x}$ и в интервала $[1, 2]$ е въведена равномерна мрежа от $n + 1$ точки, взети през стъпка $h = 1/n$, т.е. $x_0 = 1, x_1 = 1 + h, x_2 = 1 + 2h, \ldots, x_n = 1 + nh =: 2$. Да се определи стъпката h така, че функцията $f(x)$ да може да се приближава в $[1, 2]$ с точност 0.001 с полином от втора степен, интерполиращ f в най-близките до x възли от системата $\{x_k\}_{k=0}^n$.

Решение. Нека фиксираме произволно x в интервала $[1, 2]$ и да означим най-близките три възела до x съответно с x_{i-1}, x_i, x_{i+1}. Нека още $p_i(x)$ интерполира f в x_{i-1}, x_i, x_{i+1}. От теоремата за оценка на грешката имаме

$$\begin{aligned}
|f(x) - p_i(x)| &= \left| \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1}) \right| = \left| \frac{\frac{3}{8\xi^{5/2}}}{3!}(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1}) \right| \\
&= \left| \frac{3}{48\xi^{5/2}}(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1}) \right| \leq \frac{1}{16} \left| (x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1}) \right|.
\end{aligned}$$

В последното неравенство използвахме, че максимума на $\left|\dfrac{1}{\xi^{5/2}}\right|$ за $\xi \in [1,2]$ се достига при $\xi = 1$.

Искаме да дадем оценка на грешката отгоре в $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ като я изразим спрямо стъпката h. За целта нека изразим $x_{i-1} = x_i - h,\ x_{i+1} = x_i + h$. Замествайки последното в $|R(x)|$, получаваме

$$|R(x)| \le \frac{1}{16}|(x-(x_i-h))(x-x_i)(x-(x_i+h))| = \frac{1}{16}|(x-x_i+h)(x-x_i)(x-x_i-h)|.$$

Ще намерим максимума на последното като израз на параметъра h, като първо изключим x_i от израза в дясната страна. За целта нека направим смяна на променливата $t := x - x_i$. Тъй като $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$, то от смяната следва, че $t \in [-h, h]$. Да заместим последното в израза за грешката:

$$|R(x)| = |R(x_i+t)| \le \frac{1}{16}|(t+h)t(t-h)|.$$

Остава да намерим максимума на функцията в дясната страна на последното неравенство за $t \in [-h, h]$. Да определим екстремалните точки на функцията $\varphi(t) := (t-h)t(t+h) = t^3 - th^2$. Имаме

$$\varphi'(t) = 3t^2 - h^2 \Rightarrow \varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{h}{\sqrt{3}}.$$

Максималната стойност по модул в интервала $[-h, h]$ ще бъде измежду екстремалните точки и двата края на интервала, т.е. точките $\pm h, \pm\dfrac{h}{\sqrt{3}}$. Имаме

$$\varphi(\pm h) = 0, \varphi\left(-\frac{h}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2h^3}{3\sqrt{3}}, \varphi\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2h^3}{3\sqrt{3}}.$$

Следователно получихме, че максималната по модул стойност е

$$\left|\varphi\left(\pm\frac{h}{\sqrt{3}}\right)\right| = \frac{2h^3}{3\sqrt{3}}$$

и тогава

$$|R(x)| \le \frac{1}{16}\cdot\frac{2h^3}{3\sqrt{3}} = \frac{h^3}{24\sqrt{3}}.$$

Остава да поискаме точността на приближение да е не по-лоша от 0.001. Последното е еквивалентно на това максималната грешка да бъде ≤ 0.001. Имаме

$$\frac{h^3}{24\sqrt{3}} \le 0.001 \Leftrightarrow h \le \frac{2\sqrt{3}}{10}.$$

□

Задача 4. Да се намери оценка на грешката $R_n(x) = f(x) - L_n(f;x)$ при $f(x) = \sin x$ и интерполационни възли $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ и да се покаже, че в този случай $\max\limits_{x\in[a,b]} |R_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Решение. От теоремата за оценка на грешката имаме

$$f(x) - L_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n).$$

Очевидно $f^{(n+1)}(\xi) \in \{\pm\sin\xi, \pm\cos\xi\}$. Тъй като последните тригонометрични функции са ограничени по модул отгоре от 1, за всяко ξ, то получаваме

$$|f(x) - L_n(f;x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}|x-x_0|\dots|x-x_n|.$$

Ако успеем да покажем, че оценката отгоре клони към 0 при $n \to \infty$, то и $|R_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$. Тъй като $x \in [a,b]$, то всеки от изразите (равни на дължините на интервалите между x и x_0, x и x_1, ..., x и x_n, съответно)

$$|x-x_0|, \dots, |x-x_n|$$

ще бъде ограничен отгоре от дължината на интервала $[a,b]$, т.е.

$$|f(x) - L_n(f;x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}|\underbrace{(x-x_0)}_{\leq b-a}|\dots|\underbrace{(x-x_n)}_{\leq b-a}| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

За дясната страна в неравенството очевидно е в сила

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

откъдето $|R(x)| \to 0, n \to \infty$. □

Последната задача показва, че при интерполация на функцията $\sin x$ (аналогично на $\cos x$) с нарастване на броя на интерполационните възли намалява оценката на грешката, т.е. колкото повече възли избираме, толкова по-точно ще приближаваме функцията. В следващата глава ще покажем, че всъщност увеличаването на броя на интерполационните възли за произволна функция може да доведе до сериозни грешки от интерполация.

Допълнителни задачи

Задача 5. Функцията $f(x) = \ln(x)$ се интерполира с полином на Лагранж, минаващ през точките $(1, f(1)), (2, f(2))$ и $(4, f(4))$. Като използвате теоремата за оценка на грешката, дайте оценка отгоре на грешката по модул.

Задача 6. Функцията $f(x) = \sin x$ се интерполира с полином на Лагранж, построен за възли $\pi/4$ и $\pi/2$. Като използвате теоремата за оценка на грешката, дайте оценка отгоре на грешката по модул.

Задача 7. Да се покаже, че грешката, която се допуска при приближаване на $f(x) = e^{2x}$ в интервала $[-1/2, 1/2]$ с интерполационния полином на Лагранж от втора степен, построен за възли $-1/2, 0, 1/2$, не надминава $\sqrt{3}/9$.

Задача 8. Нека $f \in C^2[0,1]$ и е известно, че $|f''(x)| \leq x^2$, $\forall x \in [0,1]$. Да означим с $p_\xi(x)$ по части линейната в $[0,\xi]$ и $[\xi,1]$ непрекъсната функция, която интерполира f в точките $0, \xi, 1$. Да се определи ξ така, че

$$|f(x) - p_\xi(x)| \leq 0.02 \quad \text{в интервала } [0,1].$$

Глава 2

Полиноми на Чебишов

В миналата глава разгледахме теоремата за оценка на грешката при интерполация и показахме, че ако $f \in C^{n+1}[a,b]$ и $\max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$, то е в сила

$$|f(x) - L_n(f;x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |(x-x_0)\dots(x-x_n)|.$$

Естествено е за различни възли $x_0, \dots, x_n$ получените функции $|(x-x_0)\dots(x-x_n)|$ да достигат различна максимална стойност в интервала $[a,b]$. Бихме могли да си зададем въпроса може ли да изберем възли $x_0^*, \dots, x_n^*$ така, че оценката на грешката (отгоре) за тях да бъде минимална спрямо всички останали оценки за различните възли на интерполация, т.е.

$$\max_{x\in[a,b]} |(x-x_0^*)(x-x_1^*)\dots(x-x_n^*)| \leq \max_{x\in[a,b]} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|.$$

С други думи, търсим полинома от вида $(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$, който най-малко се отклонява от нулата. В този смисъл може да кажем, че търсим полином, при който получаваме най-добра интерполация, в смисъл на минимална оценка отгоре на грешката по модул за всяко $x \in [a,b]$.

Отговорът на този въпрос се крие в така наречените **полиноми на Чебишов от първи род**.

Определение 1. Полином на Чебишов от първи род ще наричаме функцията

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),\ \ x \in [-1,1], n \in \mathbb{N}.$$

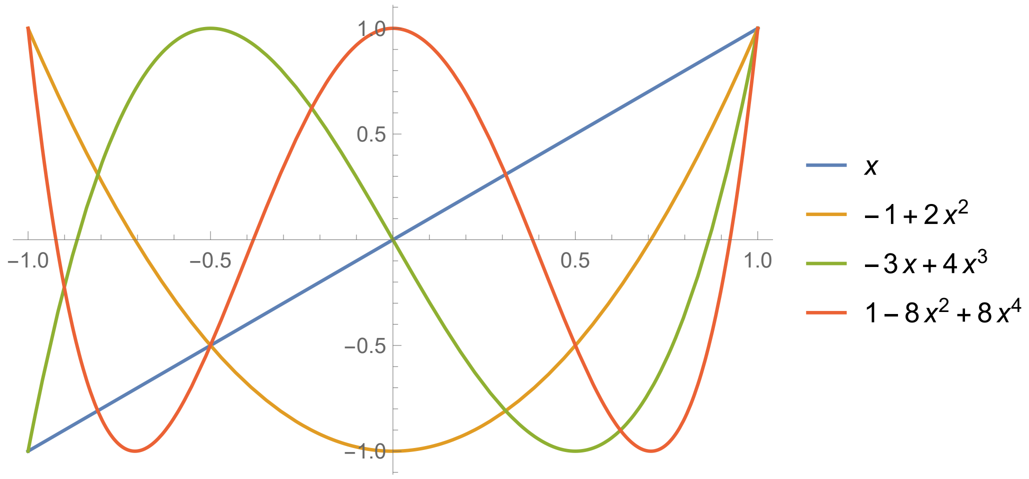
От горната дефиниция се вижда, че $|T_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1,1]$. Да припомним някои особености и характеристики на полиномите $T_n(x)$, изведени на лекции:

1. В сила е рекурентната връзка

   $$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x).$$

   Нека запишем явния вид на първите няколко полинома на Чебишов, като използваме рекурентната връзка:

   $$\begin{aligned} T_0(x) &= \cos(0 \arccos x) = \cos 0 = 1, \\ T_1(x) &= \cos(1 \arccos x) = x, \\ T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1. \end{aligned}$$



Фигура 2.1: Графика на $T_n(x)$ за $n = \overline{1,4}$ в интервала $[-1, 1]$.

От графиката на полиномите на Фиг. 2.1 можем да забележим, че $T_n(1) = 1, T_n(-1) = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Последното може да се покаже и аналитично.

2. $T_n(x)$ съвпада с алгебричен полином от степен n със старши коефициент 2^{n-1}, т.е.

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{0, n}. \tag{2.1}$$

3. Нули на полинома на Чебишов от първи род

   Както вече казахме, полиномът на Чебишов от n-ти ред е алгебричен полином. Следователно $T_n(x)$ има най-много n нули. Нека ги определим.

$$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(n \arccos x) = 0 \Leftrightarrow n \arccos x = \frac{(2k-1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$$
$$\Leftrightarrow x = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, k \in \mathbb{Z}.$$

   Следователно неговите n различни нули (ще ги бележим с ξ_k) се намират по формулата

$$\xi_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

   Важно е да обърнем внимание, че горните косинуси са в низходящ ред, т.е. $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n$.

4. Екстремуми на $T_n(x)$

   Други характерни точки за полинома на Чебишов $T_n(x)$, които се оказват много важни на практика, са неговите екстремални точки в $[-1, 1]$. Това са точките, в които $T_n'(x) = 0$, и точките ± 1. Имаме:

$$-\frac{n \sin(n \arccos x)}{-\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sin(n \arccos x) = 0, \Leftrightarrow n \arccos x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

   Тъй като $T_n'(x)$ е полином от степен $n-1$, то и неговите нули (ще ги означаваме с η_k) са

$$\eta_k = \cos\frac{k\pi}{n},\ k = 1, \ldots, n-1. \tag{2.3}$$

Вземайки предвид, че $\eta_0 = 1, \eta_n = -1$, то екстремалните точки са

$$\eta_k = \cos\frac{k\pi}{n},\ k = 0, \dots, n.$$

Да обърнем внимание, че това са екстремални точки в интервала $[-1, 1]$, където $T_n(x)$ съвпада с $\cos(n \arccos x)$. Ако разгледаме интервала $(-\infty, \infty)$, точките ± 1 не са екстремални и полиномът има само $n-1$ локални екстремума в $(-\infty, \infty)$, а именно $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$. Екстремалните точки също са подредени в низходящ ред, т.е. $\eta_0 > \eta_1 > \dots > \eta_n$.

И така, имаме

$$T_n(\eta_k) = \cos(n \arccos \eta_k) = \cos\left(n \arccos\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k, k = 0, \dots, n.$$

Да обърнем отново внимание, че максималната стойност на $|T_n(x)|$ в $[-1, 1]$ е 1 и се достига в точките η_k, като те се редуват. Такива точки, в които функцията си сменя последователно стойността по модул и тя е максимална, се наричат **точки на алтернанс**.

Полиномите на Чебишов се използват често, за да минимизират грешки от апроксимация. Оказва се, че при интерполация именно нулите на полинома на Чебишов ни дават отговор на въпроса при кои възли $x_0^*, \dots, x_n^*$ е изпълнено

$$\max_{x\in[a,b]} |(x - x_0^*)(x - x_1^*) \dots (x - x_n^*)| \le \max_{x\in[a,b]} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \tag{2.4}$$

Последното следва непосредствено от следващата теорема.

Теорема 2. Нека $P(x)$ е произволен алгебричен полином от степен n със старши коефициент 2^{n-1}. Тогава

$$1 = \max_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| \le \max_{x\in[-1,1]} |P(x)|, \tag{2.5}$$

като равенство се достига това и само тогава, когато $T_n(x) \equiv P(x)$.

Последната теорема ни казва, че измежду всички полиноми от n-та степен със старши коефициенти 2^{n-1} (както е и $T_n(x)$, вж. (2.1)), най-малък максимум по модул в интервала $[-1, 1]$ има точно полиномът на Чебишов $T_n(x)$.

Да отбележим, че от (2.1) и (2.2) следва, че

$$T_n(x) = 2^{n-1}(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n).$$

Аналогично, ако $x_0, \dots, x_n$ са нулите на $P(x)$, то

$$P(x) = 2^{n-1}(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Нека заместим последните в (2.5). Имаме

$$1 = 2^{n-1} \max_{x\in[-1,1]} |(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n)| \le \max_{x\in[-1,1]} 2^{n-1}|(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)|.$$

Непосредствено от последното следва, че

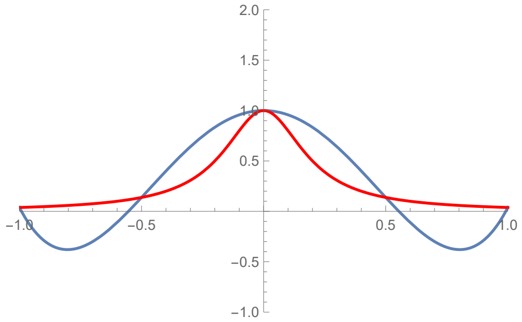
$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} |(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n)| \le \max_{x\in[-1,1]} |(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)|.$$

С други думи в интервала $[-1,1]$ при избор на възли нулите на полинома на Чебишов (от съответната степен) получаваме най-добра интерполация в смисъл на минимална оценка отгоре на грешката по модул. Ако търсим най-добрите възли на интерполация (в смисъл на минимална оценка отгоре на грешката по модул) **в произволен интервал** $[a,b]$, то можем да използваме **смяната**

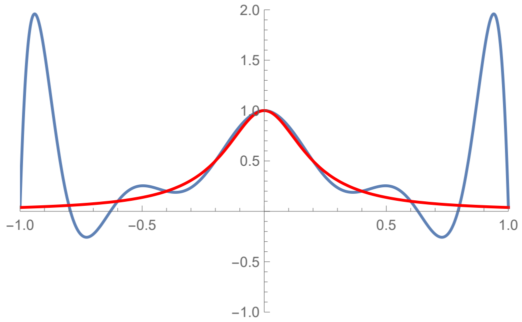
$$t_k = \frac{(b-a)}{2}\xi_k + \frac{a+b}{2},$$

при която $[-1,1] \to [a,b]$.

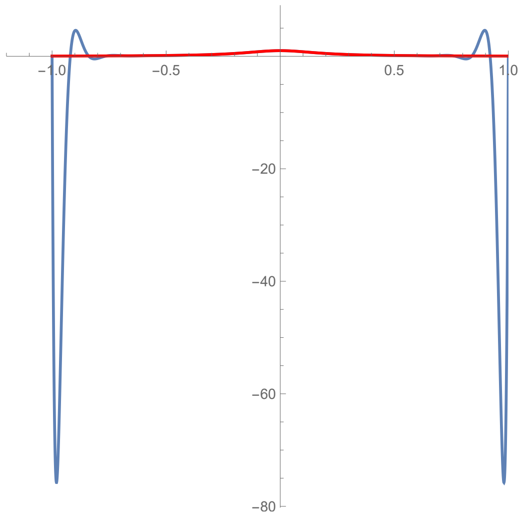
За да илюстрираме значимостта на Чебишовите възли, ще разгледаме задачата за интерполиране на **функцията на Рунге** $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$, която е известен пример за трудна за интерполиране функция (проблемите при нейното приближаване са известни като феномен на Рунге). Нека разгледаме задачата за интерполиране на функцията на Рунге в интервала $[-1,1]$ и изберем възлите на интерполация да бъдат равноотдалечени, като разделим интервала съответно на 5, 10, 30 равни части. Получените интерполационни задачи имат съответно 6, 11, 31 равноотдалечени възела и определят съответно интерполационни полиноми от степен 5, 10, 30. На графиката по-долу са показани функцията и получените интерполационни полиноми.



(а) Графика на функцията на Рунге (червено) и съответния интерполационен полином на Лагранж от пета степен (синьо) при $n = 5$.



(б) Графика на функцията на Рунге (червено) и съответния интерполационен полином на Лагранж от десета степен (синьо) при $n = 10$.

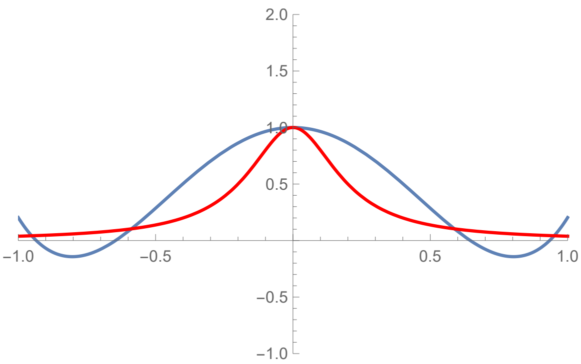


(в) Графика на функцията на Рунге (червено) и съответния интерполационен полином на Лагранж (синьо) при $n = 30$.

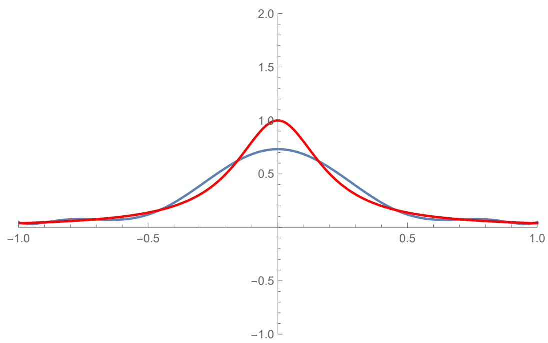
Фигура 2.2

Както виждаме от трите графики, в този случай (за разлика от задачата за интерполиране на $\sin x$, където с увеличаване броя на възлите грешката клонеше към 0) увеличаването на броя на възлите, увеличава грешката от интерполация (обикновено по-голяма грешка се наблюдава в двата края на интервала). Причината за това е, че колкото повече възли на интерполация изберем, толкова по-голяма би била степента на получения алгебричен полином. За полиномите от висока степен обаче се наблюдава рязка промяна (скок) в поведението на полинома в относително малки интервали (вж. Фиг. 2.2 (в)). Затова обикновено, когато се решава произволна задача се препоръчва да се използват интерполационни полиноми от достатъчно ниска степен – например пета, шеста.

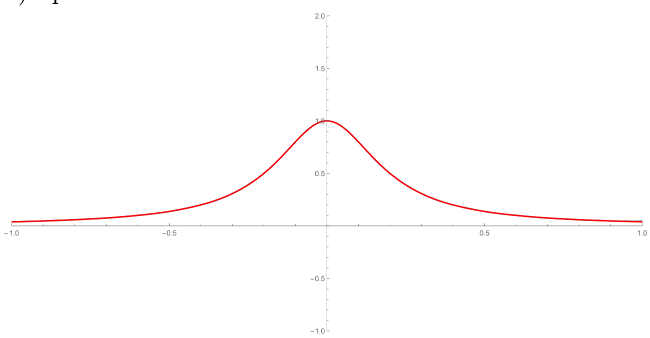
Нека сега изберем възлите на интерполация да бъдат Чебишовите възли, получени за $n = 5, 10, 30$, като се използва формула (2.2). На следващата графика можем да видим какво се случва с интерполационните полиноми в този случай.



(а) Графика на функцията на Рунге (червено) и съответния интерполационен полином на Лагранж от пета степен (синьо) при $n = 5$.



(б) Графика на функцията на Рунге (червено) и съответния интерполационен полином на Лагранж от десета степен (синьо) при $n = 10$.



(в) Графика на функцията на Рунге (червено) и съответния интерполационен полином на Лагранж (синьо) при $n = 30$.

Както виждаме от графиките, грешката от интерполация при избор на възли нулите на полинома на Чебишов действително намалява с увеличаването на n.

Задача 1. Нека $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots + a_1x + a_0$ е n-тият полином на Чебишов. Да се намери a_1.

Задача 2. Напишете интерполационната формула на Лагранж с възли, съвпадащи с нулите на полинома на Чебишов от $n-$та степен, а именно

$$\xi_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, \ldots, n.$$

Получения израз опростете така, че да го получите като функция само на възлите ξ_k, $T_n(x)$ и степента на полинома n.

Решение. За тази задача ще използваме представянето (1.4) на интерполационния полином на Лагранж. Имаме

$$L_{n-1}(f;x) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{\omega(x)}{(x-\xi_k)\omega'(\xi_k)},$$

където $\omega(x) = (x-\xi_1)\dots(x-\xi_n)$. В сила са равенствата

$$\omega(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \Rightarrow \omega'(x) = \frac{T_n'(x)}{2^{n-1}}.$$

Да заместим двата израза във формулата за интерполационния полином. Имаме:

$$L_{n-1}(f;x) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}}{(x-\xi_k)\frac{T_n'(\xi_k)}{2^{n-1}}} = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{T_n(x)}{(x-\xi_k)T_n'(\xi_k)}. \tag{2.6}$$

От друга страна

$$T_n'(x) = \frac{n\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$T_n'(\xi_k) = \frac{n\sin(n\arccos\xi_k)}{\sqrt{1-\xi_k^2}} = \frac{n\sin\left(n\arccos\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)}{\sqrt{1-\xi_k^2}}$$
$$= \frac{n\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}}{\sqrt{1-\xi_k^2}} = \frac{n(-1)^{k-1}}{\sqrt{1-\xi_k^2}}.$$

Заместваме последното в (2.6) и получаваме

$$L_{n-1}(f;x) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{T_n(x)}{(x-\xi_k)}\left(\frac{n(-1)^{k-1}}{\sqrt{1-\xi_k^2}}\right)^{-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{n} f(\xi_k)\frac{T_n(x)\sqrt{1-\xi_k^2}}{x-\xi_k} = \frac{T_n(x)}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} f(\xi_k)\frac{\sqrt{1-\xi_k^2}}{x-\xi_k}.$$

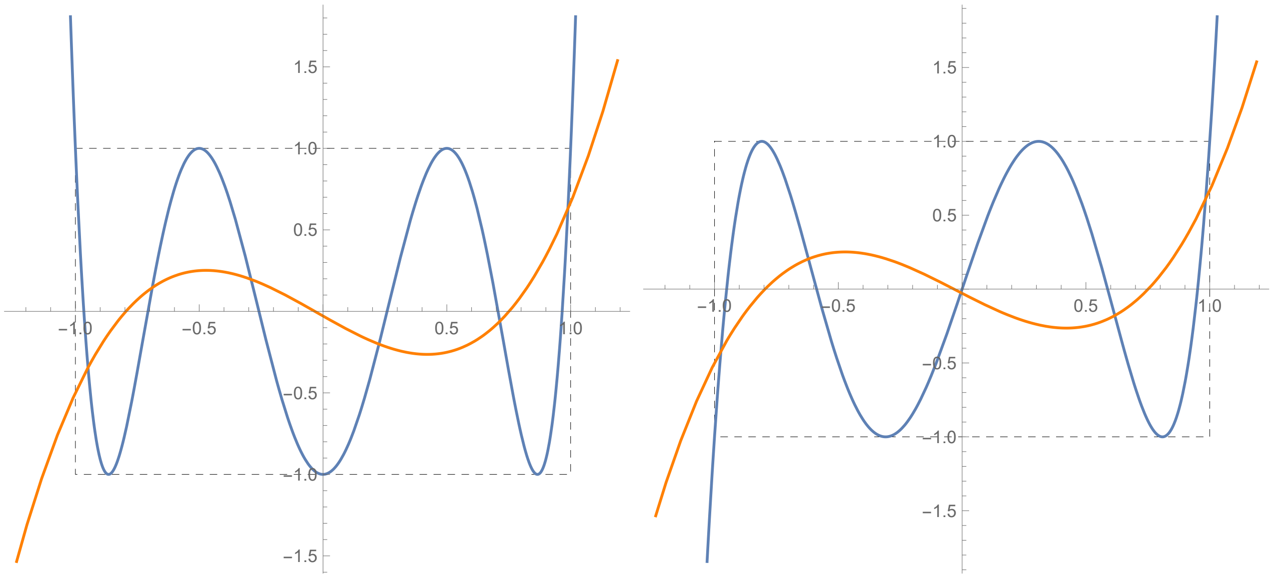
Коментар: Последната формула значително намалява броя извършени аритметични операции в сравнение с формулата на Лагранж. Както знаем, броят извършени операции е от съществено значение, когато реализираме даден алгоритъм. □

Вече показахме какво се случва с полинома $T_n(x)$ в интервала $[-1,1]$. Сега ще разгледаме два частни случая, в които ще изследваме поведението на n-тия полином на Чебишов спрямо друг полином от π_n, удовлетворяващ конкретни условия, извън този интервал.

Задача 3. Нека $P \in \pi_n$ и $\max\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)| < 1$. Да се докаже, че за $|x| > 1$ е изпълнено $|P(x)| < |T_n(x)|$.

Доказателство. Знаем, че n-тият полином на Чебишов има $n+1$ екстремални точки в $[-1,1]$, в които приема последователни стойности ± 1 (ще ги наричаме още **точки на алтернанс**). Това означава, че $T_n(x)$ преграждa този интервал n на брой пъти. От последното е ясно, че тогава той пресича и $P(x)$ n пъти в $[-1,1]$ и следователно разликата $T_n(x) - p(x)$ има n на брой нули в интервала.

От друга страна е в двата края на интервала е в сила $|T_n(\pm 1)| > |P(\pm 1)|$ (вж. Фиг. 2.4). Следователно, за да може $|P(x)|$ да мажорира $|T_n(x)|$ за някое $|x| > 1$, трябва двете криви да се пресекат в точка извън интервала. Да допуснем, че съществува такава точка ξ извън интервала $[-1,1]$, в която двата полинома се пресичат. Тогава разликата им вече ще има $n+1$ нули, но тъй като тя е полином от π_n (разлика на два полинома от π_n), то тя трябва да е тъждествено 0 и двата полинома биха съвпадали. Това, разбира се, е невъзможно тъй като те по условие приемат различни стойности в точките на алтернанс. Стигнахме до противоречие.



(а) (б)

Фигура 2.4: Примерна графика на $T_n(x)$ (в синьо) и $P(x)$ (в оранжево) при (а) n-четно; (б) n-нечетно.

$\square$

Задача 4. Нека $P(x) \in \pi_n$ и $|P(\eta_k)| \le 1, k = \overline{0,n}$, където η_k са **точките на алтернанс** за $T_n(x)$. Да се докаже, че $|P(x)| \le |T_n(x)|$ за $|x| \ge 1$.

Доказателство. За да покажем, че $|P(x)| \le |T_n(x)|, \ |x| > 1$, ще използваме интерполационните полиноми на $P(x)$ и $T_n(x)$, построени за възли $\eta_k = \cos\frac{k\pi}{n}, k = \overline{0,n}$, и доказаното вече от нас, че ако $P(x) \in \pi_n$ и $T_n(x) \in \pi_n$, то $P(x) \equiv L_n(P;x)$ и $T_n(x) \equiv L_n(T_n;x)$. Имаме

$$P(x) \overset{\in\pi_n}{\equiv} L_n(P;x) = \sum_{k=0}^{n} P(\eta_k) l_{kn}(x), \tag{2.7}$$

$$T_n(x) \overset{\in\pi_n}{\equiv} L_n(T_n;x) = \sum_{k=0}^{n} T_n(\eta_k) l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k l_{kn}(x). \tag{2.8}$$

- Нека $x > 1$. Имаме

$$|P(x)| \overset{(2.7)}{=} \left| \sum_{k=0}^{n} P(\eta_k) l_{kn}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |P(\eta_k) l_{kn}(x)| \overset{|P(\eta_k)|\leq 1}{\leq} \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)| \,. \tag{2.9}$$

Нашата цел е да ограничим последното отгоре от $T_n(x)$, затова ще намерим връзка между $|l_{kn}(x)|$ и $|T_n(x)|$. В случая, ще използваме, че $|l_{kn}(x)|=\text{sign}(l_{kn}(x))l_{kn}(x)$. Знаем, че

$$l_{kn}(x) = \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x-\eta_i}{\eta_k-\eta_i} = \frac{(x-\eta_0)(x-\eta_1)\dots(x-\eta_{k-1})(x-\eta_{k+1})\dots(x-\eta_n)}{(\eta_k-\eta_0)(\eta_k-\eta_1)\dots(\eta_k-\eta_{k-1})(\eta_k-\eta_{k+1})\dots(\eta_k-\eta_n)}.$$

За да определим знака му, ще използваме, че $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$ обхождат интервала $[-1,1]$, започвайки от десния му край ($\eta_0 = 1, \dots, \eta_n = -1$), т.е. са подредени в низходящ ред и $\eta_0 > \eta_1 > \dots > \eta_n$. Имаме:

$$l_{kn}(x) = \frac{\overbrace{(x-\eta_0)}^{>0}\overbrace{(x-\eta_1)}^{>0}\dots\overbrace{(x-\eta_{k-1})}^{>0}\overbrace{(x-\eta_{k+1})}^{>0}\dots\overbrace{(x-\eta_n)}^{>0}}{\underbrace{(\eta_k-\eta_0)}_{<0}\underbrace{(\eta_k-\eta_1)}_{<0}\dots\underbrace{(\eta_k-\eta_{k-1})}_{<0}\underbrace{(\eta_k-\eta_{k+1})}_{>0}\dots\underbrace{(\eta_k-\eta_n)}_{>0}},$$

откъдето следва, че $|l_{kn}(x)| = (-1)^k l_{kn}(x)$. Заместваме в (2.9):

$$|P(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^{n} T_n(\eta_k) l_{kn}(x) \overset{(2.8)}{\equiv} T_n(x) = |T_n(x)|.$$

За последното равенство използвахме факта, че $|T_n(x)| = T_n(x),\ x > 1$.

- Нека $x < -1$. Постъпваме аналогично.

$$|P(x)| \overset{(2.7)}{=} \left| \sum_{k=0}^{n} P(\eta_k) l_{kn}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |P(\eta_k) l_{kn}(x)| \overset{|P(\eta_k)|\leq 1}{\leq} \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)| \,.$$

Определяме знака на $l_{kn}(x)$:

$$l_{kn}(x) = \frac{\overbrace{(x-\eta_0)}^{<0}\overbrace{(x-\eta_1)}^{<0}\dots\overbrace{(x-\eta_{k-1})}^{<0}\overbrace{(x-\eta_{k+1})}^{<0}\dots\overbrace{(x-\eta_n)}^{<0}}{\underbrace{(\eta_k-\eta_0)}_{<0}\underbrace{(\eta_k-\eta_1)}_{<0}\dots\underbrace{(\eta_k-\eta_{k-1})}_{<0}\underbrace{(\eta_k-\eta_{k+1})}_{>0}\dots\underbrace{(\eta_k-\eta_n)}_{>0}}.$$

От последното следва, че

$$|l_{kn}(x)| = (-1)^{n+k} l_{kn}(x)$$

и следователно

$$|P(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} l_{kn}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} T_n(\eta_k) l_{kn}(x) \overset{(2.8)}{=} (-1)^n T_n(x) = |T_n(x)|.$$

Последното равенство следва от факта, че $T_n(x) > 0$ при n – четно и $T_n(x) < 0$ при n – нечетно за всяко $x < -1$.

- За $x = \pm 1$ ($\eta_0 = 1$, η_n=-1) твърдението е очевидно от условието за $|P(\eta_k)|$. Имаме

$$|P(\pm 1)| \leq 1, \quad |T_n(\pm 1)| = 1 \Rightarrow |P(\pm 1)| \leq |T_n(x)|.$$

$\square$

Глава 3

Разделени разлики. Интерполационна формула на Нютон

Досега в упражненията разгледахме интерполационната задача на Лагранж – постановка, как да определим полинома, чиято графика минава през дадени точки, как да намерим оценка на грешката при това приближение и кои възли ни дават „най-добра” такава оценка. Нека накратко припомним постановката на задачата. Търсим $p(x) \in \pi_n$ такъв, че $p(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$, където x_i са различни възли, а $y_0, \dots, y_n$ са дадени стойности. Както казахме, полиномът на Лагранж може да бъде намерен като например:

- решим получената система за неизвестните коефициенти на полинома $a_0, a_1, \dots, a_n$.
- използваме интерполационната формула на Лагранж

  $$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_{kn}(x),$$

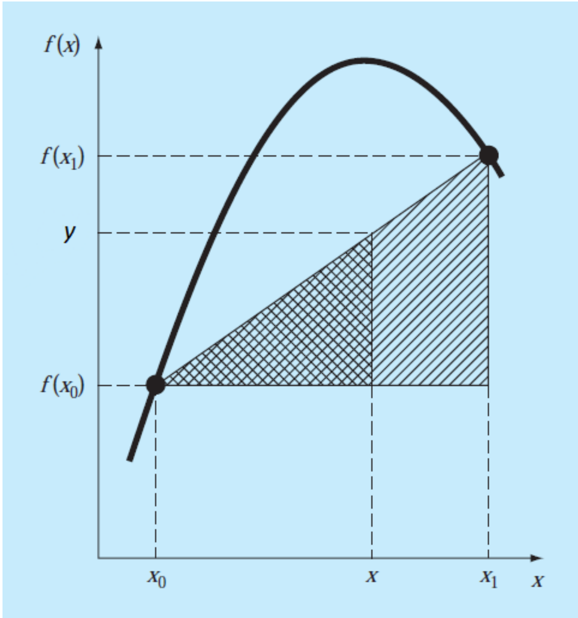
  където $l_{kn}(x)$ са базисните полиноми на Лагранж.

В тази секция ще разгледаме още една формула, по която може да се намери интерполационният полином на Лагранж – известната формула на Нютон. Всъщност, исторически, Нютон първи е получил аналитична формула за намирането му. Да обърнем внимание, че аналитичните формули, по които може да се построи полиномът, са различни, но полученият полином е **един и същ** (той е и единствен).

И така, преди да дадем общата формула на Нютон за намиране на полинома от π_n, ще разгледаме задачата в случая, когато търсим линеен и квадратичен интерполационен полином.

1. Линеен полином

   Нека в равнината са дадени точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Търсим полином от π_1, чиято графика минава през точките:



Нека (x, y) е произволна точка в равнината, лежаща върху правата, съответстваща на графиката на полинома. Лесно се вижда (например използвайки подобни триъгълници или факта, че наклонът на правата е постоянен), че е в сила

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

От последното следва, че

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)\,,$$

т.е. това е уравнението на правата и следователно търсеният полином е

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)\,.$$

Да обърнем внимание, че намерихме полинома във вида $p(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$, където $b_0 = f(x_0)$, $b_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

2. Квадратична интерполация

   Да намерим полинома от π_2, който интерполира точките (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2). Последния ще търсим във вида

$$p(x) = b_0 + b_1\,(x - x_0) + b_2\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,.$$

След известно пресмятане, като се използват условията за интерполация (тук няма да се спираме на извеждането), ще получим

$$b_0 = f(x_0),\;\; b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},\;\; b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}.$$

Следователно търсеният полином е

$$p(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{f[x_0,x_1]}(x - x_0) + \underbrace{\frac{\overbrace{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}^{f[x_1,x_2]} - \overbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}^{f[x_0,x_1]}}{x_2 - x_0}}_{f[x_0,x_1,x_2]}(x - x_0)(x - x_1).$$

Можем да постъпим аналогично за определяне на полинома на Лагранж от n-та степен, който отново ще търсим във вида

$$p(x) = b_0 + b_1\,(x - x_0) + b_2\,(x - x_0)\,(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Интересно

Причината да търсим полинома във вида

$$p(x) = b_0 + b_1\,(x - x_0) + b_2\,(x - x_0)\,(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

е следната. Както казахме, базисните полиноми на Лагранж имат стойност 1 само в един от възлите – този, за който отговарят. Във формулата на Нютон полиномът се търси като линейна комбинация на друг базис:

$$1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \ldots, (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Втората базисна функция се нулира в x_0, следващата в x_0, x_1 и т.н. Благодарение на този избор за базис, интерполационните условия водят до система с триъгълна матрица. Както знаем, решаването на такава система е непосредствено.

Коефициентите $b_0, b_1, \ldots, b_n$, които са решение на интерполационната задача, са така наречените разделени разлики.

Определение 2. Нека $x_0, \ldots, x_n$ са дадени различни точки. **Разделена разлика** от n-ти ред на функцията f в точките $x_0, \ldots, x_n$ ще бележим с $f[x_0, \ldots, x_n]$ и дефинираме с рекурентната връзка

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

като $f[x_i] = f(x_i), \forall i$.

Нека пресметнем една примерна разделена разлика.

Задача 1. Да се намери $f[x_0, x_1, x_2]$, ако $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ и $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = 1$.

Решение. От дефиницията следва, че

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$

Последното означава, че за да пресметнем разделената разлика от втори ред $f[x_0, x_1, x_2]$, трябва да пресметнем разделените разлики от първи $f[x_1, x_2]$ и $f[x_0, x_1]$. И така:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{-1 - 0}{1 - 0} = -1;$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-1)}{2 - 1} = 2.$$

Заместваме полученото във формулата за разделената разлика от втори ред:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{2-(-1)}{2-0} = \frac{3}{2}.$$

$\square$

Връзката между понятието разделена разлика и интерполационния полином на Лагранж се открива в следната теорема.

Теорема 3. Разделената разлика $f[x_0, \dots, x_n]$ съвпада с коефициента пред x^n в интерполационния полином на Лагранж $L_n(f;x)$ за функцията f с възли $x_0, \dots, x_n$.

Като се използва последната теорема, може да се изведе **формулата на Нютон** за интерполационния полином на Лагранж:

$$\begin{aligned} L_n(f;x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots + f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) \\ &= f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0,\dots,x_k](x-x_0)\dots(x-x_{k-1}) \end{aligned}$$

или записана еквивалентно

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\dots,x_k](x-x_0)\dots(x-x_{k-1}),$$

като допълнително приемем, че $(x-x_0)\dots(x-x_{k-1}) = 1$ при $k=0$.

Задачата за намиране на интерполационния полином на Лагранж чрез формулата на Нютон се свежда до определянето на разделените разлики в горепосочената формула. Тъй като формулата е рекурсивна, на практика се използва следната, удобна за компютърна реализация, схема (например за възли x_0, x_1, x_2, x_3):

Възли	f[·]	f[·, ·]	f[·, ·, ·]	f[·, ·, ·, ·]
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2] = \frac{f[[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		
x_3	$f[x_3]$			

В горепосочената схема коефициентите във формулата на Нютон за интерполационния полином лежат най-отгоре на всеки стълб (отбелязани са в синьо). Ние ще използваме именно тази таблица за определянето на коефициентите в полинома. Нека сега приложим формулата на Нютон за конкретна задача.

Задача 2. Да се намери интерполационният полином на Лагранж във форма на Нютон, интерполиращ функцията $f(x) = \sqrt{x}$ в т. $0, 1, 4$.

Решение. Да запишем първо интерполационните условия в таблица

x	0	1	4
y	0	1	2

Търсим полинома във вида

$$L_2(f;x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1).$$

Да пресметнем разделените разлики, като попълним съответната таблица.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 0$		
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = 1$	
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = -\dfrac{1}{6}$
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{1}{3}$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 2$		

Заместваме получените разделени разлики и получаваме

$$L_2(f;x) = 0 + 1(x-0) - \frac{1}{6}(x-0)(x-1) = \frac{7}{6}\,x - \frac{1}{6}\,x^2.$$

.

Проверете сами, че така полученият полином удовлетворява интерполационните условия! □

Подробно решена примерна задача за намиране на интерполационен полином във форма на Нютон може да намерите и в това видео.

Нека обърнем внимание на ползата от това да имаме различни формули за намирането на алгебричния полином и да разгледаме случаи, в които едната формула има предимство пред другата:

- Формула на Лагранж

  Базисните полиноми на Лагранж зависят само от възлите на интерполация. Следователно, ако искаме да решим интерполационната задача с едни и същи възли, но различни съответстващи им стойности, можем да построим базисните полиноми само веднъж. Тогава в линейната комбинация на базисните полиноми ще променяме само коефициентите $f(x_i)$. В този случай е удобно да се използва формулата на Лагранж.

- Формула на Нютон

  Ако искаме да построим редица от интерполационните полиноми $L_1(f;x), L_2(f;x), \ldots,$ както следва – $L_1(f;x)$ интерполира f в точките x_0, x_1; $L_2(f;x)$ интерполира f в точките x_0, x_1, x_2 и т.н., то е удобно да използваме формулата на Нютон. Тъй като за всеки нов полином добавяме по един възел, само ще трябва да допълним таблицата с разделени разлики и да прибавим съответния член към построения преди това полином. Ако сменим функционалните стойности обаче, ще трябва да пресметнем всички разделени разлики отначало!

Вече показахме как се намира интерполационният полином на Лагранж, като се използва формулата на Нютон. Сега ще се спрем на няколко интересни свойства на разделената разлика.

Свойство 1 В сила е следната формула за разделената разлика

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}, \tag{3.1}$$

за $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Доказателство. От дефиницията на разделена разлика става ясно, че всяка разделена разлика се представя като линейна комбинация на функционалните стойности на f в съответните възли. За да докажем горното тъждество, ще използваме, че разделената разлика от n-ти ред съвпада с коефициента пред x^n в полинома на Лагранж. Нека припомним и формулата на Лагранж, записана чрез $\omega(x)$:

$$\begin{aligned} L_n(f; x) &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_{kn}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)} \\ &= \frac{f(x_0)}{\omega'(x_0)} \underbrace{\frac{\omega(x)}{(x - x_0)}}_{x^n + \dots} + \dots + \frac{f(x_n)}{\omega'(x_n)} \underbrace{\frac{\omega(x)}{(x - x_n)}}_{x^n + \dots}. \end{aligned}$$

От последната формула се вижда, че коефициентът пред x^n е точно $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$, откъдето следва исканото тъждество.

Получихме, че разделената разлика е линейна комбинация на $f(x_k)$ с коефициенти $\dfrac{1}{\omega'(x_k)}$ за съответните възли:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{1}{\omega'(x_0)} f(x_0) + \frac{1}{\omega'(x_1)} f(x_1) + \dots + \frac{1}{\omega'(x_n)} f(x_n). \tag{3.2}$$

□

Свойство 2 Разделената разлика не зависи от подредбата на възлите, т.е.

$$f[x_0, \dots, x_n] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}],$$

където $i_0, i_1, \dots, i_n$ е произволна пермутация.

Доказателство. В общия случай на база само на рекурентната връзка това трудно може да се покаже, затова ще го покажем като използваме изведеното досега. Знаем, че интерполационният полином не зависи от подредбата на възлите, т.е. той е един и същ за различна тяхна пермутация. Тъй като разделената разлика от ред n съвпада с коефициента пред x^n в този полином, то, независимо от подредбата на $x_0, \dots, x_n$, тя ще бъде едно и също число.
Забележка: Друг начин да се докаже последното е като се използва фактът, че разделената разлика е линейна комбинация на функционалните стойности, вж. (3.2). *Това означава, че дори и да разместим местата на възлите в разделената разлика, линейната комбинация ще се запази.* □

Свойство 3 Разделената разлика е **линеен функционал**[1], т.е.

$$(f + cg)[x_0, \dots, x_n] = f[x_0, \dots, x_n] + cg[x_0, \dots, x_n],$$

[1] Функционал е изображение, което приема функция и връща число. Пример за функционал е определеният интеграл. Линейният функционал F изпълнява условията $F(f + g) = F(f) + F(g)$ и $F(\lambda g) = \lambda F(g)$. Разделената разлика е функционал от вида $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$, където $A_k = \dfrac{1}{\omega'(x_k)}$.

където $c \in R$, а f и g са дадени функции.

Доказателство. За доказателството отново ще използваме (3.1), т.е. $f[x_0,\dots,x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$. От последното имаме

$$(f+cg)[x_0,\dots,x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f(x)+cg(x))\big|_{x=x_k}}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)+cg(x_k)}{\omega'(x_k)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)} + c\sum_{k=0}^{n} \frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} = f[x_0,\dots,x_n] + cg[x_0,\dots,x_n].$$

□

Свойство 4 Ако $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \pi_n$, то $f[x_0,\dots,x_n] = a_n$;
Свойство 5 Ако $f \in \pi_{n-1}$, то $f[x_0,\dots,x_n] = 0$.

Нека сега приложим свойствата в няколко задачи.

Задача 3. Да се докаже, че $\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 0$.

Доказателство. За доказателството ще използваме формула (3.1). След като я приложим за функцията $f(x) = \omega''(x)$, получаваме:

$$f[x_0,\dots,x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}.$$

Тъй като $f(x) = \omega''(x)$ е от степен $n-1$ ($\omega(x)$ е от степен $n+1$), то разделената разлика от n-ти ред е равна на 0, откъдето следва и исканото тъждество. □

Задача 4. Нека $x_k \neq 0, -1$ за $k = 1,\dots,n$. Докажете равенството

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n f\left(\dfrac{1}{x_k}\right)}{f'(x_k)(1+x_k)} = (-1)^n\left(x_1x_2\dots x_n - 1\right),$$

където $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$.

Доказателство. Да разгледаме функцията $g(x) = x^n f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ще намерим разделената ѝ разлика от n-ти ред за възли $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$, като допълнително положим $x_{n+1} = -1$ (за разделената разлика от n-ти ред са ни необходим $n+1$ възела). Да опростим $g(x)$:

$$g(x) = x^n\left(\frac{1}{x} - x_1\right)\left(\frac{1}{x} - x_2\right)\dots\left(\frac{1}{x} - x_n\right) = \cancel{x}^n \frac{(1-x_1x)}{\cancel{x}}\frac{(1-x_2x)}{\cancel{x}}\dots\frac{(1-x_nx)}{\cancel{x}}$$
$$= \left((-1)^n x_1\dots x_n\right)x^n + \dots$$

Тъй като $g(x)$ е полином от n-та степен, то разделената разлика от n-ти ред ще съвпада със старшия му коефициент, т.е.

$$g[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] = (-1)^n x_1 \dots x_n. \tag{3.3}$$

Освен това от (3.1) знаем още, че за разделената разлика от n-ти ред е в сила следната формула

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} = g[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}], \tag{3.4}$$

където

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n+1}).$$

Последното е еквивалентно на

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} + \frac{g(x_{n+1})}{w'(x_{n+1})} = g[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}].$$

Прехвърляйки от другата страна едното събираемо, получаваме

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{g(x_k)}{\omega'(x_k)} = g[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] - \frac{g(x_{n+1})}{w'(x_{n+1})}. \tag{3.5}$$

Да уточним лявата и дясната страна на уравнение (3.5).

- За дясната страна имаме:

$$\begin{aligned} &g[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] = (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n \\ &\frac{g(x_{n+1})}{\omega'(x_{n+1})} = \frac{g(-1)}{\omega'(-1)} = \frac{(-1)^n(-1-x_1)(-1-x_2)\ldots(-1-x_n)}{(-1-x_1)(-1-x_2)\ldots(-1-x_n)} = (-1)^n. \end{aligned}$$

- За лявата страна на (3.5) имаме:

$$\begin{aligned} g(x_k) &= x_k^n f(x_k), \\ \omega'(x_k) &= \underbrace{(x_k - x_1)(x_k - x_2)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}_{f'(x_k)}(x_k - x_{n+1}) \\ &= f'(x_k)(x_k - \underbrace{x_{n+1}}_{=-1}) = f'(x_k)(x_k + 1) \end{aligned}$$

Заместваме полученото за лявата и дясната страна в (3.5) и получаваме исканото тъждество. □

Допълнителни задачи

Задача 5. Като използвате формулата на Нютон, намерете интерполационния полином за функцията $f(x) = 2^{x+1}$ с възли 0, 1, 2.

Задача 6. Като използвате формулата на Нютон, намерете интерполационния полином за таблицата

x	0	2	3	4
f	7	11	28	63

Задача 7. Дадена е функцията $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Да се намери интерполационният полином от π_2 във форма на Нютон, който интерполира функцията във възли 0, 2, 3.

Задача 8. Намерете интерполационния полином във форма на Нютон, който интерполира таблицата

x	2.5	3	4
f	6	7	3

Задача 9. Дадени са времето t и разстоянието $x(t)$, изминато от ракета, изстреляна от земята в момент $t = 0$:

t (s)	0	1	2	4
x (m)	0	20	60	320

Приложете интерполационната формула на Нютон, за да намерите функцията $x(t)$, описваща изминатия път на ракетата. Използвайте намерената функция, за да пресметнете приближено скоростта и ускорението на ракетата в момент $t = 3$ (използвайте съответно $x'(t)$ и $x''(t)$).

Задача 10. Като използвате свойствата на разделената разлика, докажете тъждеството

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k \omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = (n+1)n.$$

Глава 4

Крайни разлики

В предишното упражнение разгледахме една нова формула за намиране на интерполационния полином на Лагранж – формулата на Нютон. Полиномът във формата на Нютон има следния вид:

$$L_n(f;x) = f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\dots+f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1}).$$

Последният е линейна комбинация на базисните функции

$$1,\; x-x_0,\; (x-x_0)(x-x_1),\; (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\dots,(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}),$$

с коефициенти така наречените разделени разлики, които можем лесно да пресметнем, използвайки познатата ни схема:

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4]=\dfrac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5]=\dfrac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5]=\dfrac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5]=\dfrac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

По дефиниция всяка разделена разлика от вида $f[x_i,\dots,x_j]$ съдържа в знаменателя си разликата x_j-x_i. Нека сега разгледаме случая, в който възлите x_i са **равноотдалечени**, т.е. всеки два последователни възела са на разстояние h (още ще го наричаме стъпка) един от друг. Имаме

$$x_1=x_0+h,\quad x_2=x_1+h=x_0+2h,\quad x_3=x_2+h=x_0+3h,\dots$$

или, иначе казано, възлите се задават по формулата

$$x_i=x_0+ih,\; i=1,2,\dots,n.$$

В този случай знаменателите в разделените разлики от един и същи ред ще бъдат равни (съответно във всеки стълб от нашата таблица знаменателят ще е един и същ). Поради това, в случая на равноотдалечени възли, е удобно знаменателите да се пропуснат и може да се изведе по-подходяща формула за интерполационния полином на база на така наречените **крайни разлики**.

Определение 3. Нека е дадена крайна редица от числа $f_0, f_1, f_2, \ldots$, които са стойности на функцията f в точките x_0, x_1, $x_2, \ldots$ Крайна разлика от k-ти ред за функцията f в точката x_i ще бележим с $\Delta^k f_i$ и дефинираме рекурентно

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i,\ k = 1, 2, \ldots,$$

като $\Delta^0 f_i = f_i, \forall i$.

Оттук нататък, ако не са посочени изрично възлите $x_0, \ldots, x_n$, ще приемаме, че те са $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и т.н.

Задача 1. Дадена е редицата от стойности $f_0 = 1,\ f_1 = 3,\ f_2 = -1,\ f_3 = 7$. Намерете $\Delta^2 f_1$ и $\Delta^3 f_0$.

Решение. Да пресметнем двете крайни разлики поотделно. Използваме рекурентната връзка и заместваме, като всеки път понижаваме реда на крайната разлика:

$$\Delta^2 f_1 = \Delta^1 f_2 - \Delta^1 f_1 = (f_3 - f_2) - (f_2 - f_1) = f_3 - 2f_2 + f_1 = 7 + 2 + 3 = 12;$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 f_0 &= \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 = \big(\Delta^1 f_2 - \Delta^1 f_1\big) - \big(\Delta^1 f_1 - \Delta^1 f_0\big) = \Delta^1 f_2 - 2\Delta^1 f_1 + \Delta^1 f_0 \\ &= (f_3 - f_2) - 2(f_2 - f_1) + (f_1 - f_0) = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0 \\ &= 7 + 3 + 9 - 1 = 18.\end{aligned}$$

За пресмятането на крайните разлики можем да използваме познатата ни, но модифицирана таблица:

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3
$x_0 = 0$	$\Delta^0 f_0 = f(x_0) = 1$			
		$\Delta^1 f_0 = \Delta^0 f_1 - \Delta^0 f_0 = 2$		
$x_1 = 1$	$\Delta^0 f_1 = f(x_1) = 3$		$\Delta^2 f_0 = \Delta^1 f_1 - \Delta^1 f_0 = -6$	
		$\Delta^1 f_1 = \Delta^0 f_2 - \Delta^0 f_1 = -4$		$\Delta^3 f_0 = 18$
$x_2 = 2$	$\Delta^0 f_2 = f(x_2) = -1$		$\Delta^2 f_1 = \Delta^1 f_2 - \Delta^1 f_1 = 12$	
		$\Delta^1 f_2 = \Delta^0 f_3 - \Delta^0 f_2 = 8$		
$x_3 = 3$	$\Delta^0 f_3 = f(x_3) = 7$			

□

Да обърнем внимание, че

- неслучайно със символа Δ се означава крайна разлика. На езика на математиката той често се използва като синоним на думата „изменение";
- $\Delta^k f_i$ е линейна комбинация на стойностите f_i, f_{i+1}, ..., f_{i+k}, т.е. линейна комбинация на f_i и следващите k на брой стойности на f. Можем да забележим, че коефициентите в линейната комбинация от предната задача са точно биномни коефициенти, т.е. коефициентите в развитието на Нютоновия бином, с редуващи се знаци. Например:

$$\begin{aligned}\Delta^3 f_0 &= 1f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0 = -f_0 + 3f_1 - 3f_2 + 1f_3 \\ &= -\binom{3}{0} f_0 + \binom{3}{1} f_1 - \binom{3}{2} f_2 + \binom{3}{3} f_3.\end{aligned}$$

За пресмятането на произволна крайна разлика от k-ти ред за функцията f може да се докаже по индукция, че са в сила следните две формули:

- За произволна точка x_i:
$$\Delta^k f_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f_{i+j};$$
- За начална точка x_0:
$$\Delta^k f_0 = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f_j.$$

И така, крайните разлики от k-ти ред действително са линейна комбинация на функционалните стойности на f в началната точка и следващите k на брой точки с биномни коефициенти и редуващи се знаци.

Задача 2. Пресметнете крайните разлики в задача 1, като използвате аналитичната формула.

Дотук разгледахме как може аналитично да се пресметнат крайните разлики. Сега ще припомним една важна лема, доказана на лекции, която ни дава връзка между разделена и крайна разлика от k-ти ред. Нея ще използваме, за да изведем интерполационната формула за равноотдалечени възли.

Лема 1. Нека $x_i = x_0 + ih,\ i = 0, \dots, k$, и функцията $f(x)$ е определена в тези точки. Тогава
$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k}.$$

Доказателството на лемата е непосредствено, като се използва индукция по броя на точките.

Използвайки последната връзка, част от свойствата на разделената разлика се пренасят върху крайната:

Свойство 1 Крайната разлика е линеен функционал, т.е. $\Delta^n (f + cg)_i = \Delta^n f_i + c\Delta^n g_i$, където $c \in \mathbb{R}$, f, g – функции;

Свойство 2 Ако $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \pi_n$, то $\Delta^n f_0 = n! h^n f[x_0, \dots, x_n] = n! h^n a_n$;

Свойство 3 Ако $f \in \pi_{n-1}$, то $\Delta^n f_0 = 0$.

Да обобщим накратко казаното дотук:

- В случая на равноотдалечени възли, т.е. $x_i = x_0 + ih,\ i = 1, 2, \dots, n$, разделените разлики във формулата на Нютон имат един и същ знаменател. Въведохме понятието крайна разлика;
- Връзката между разделена и крайна разлика в случая на равноотдалечени възли се задава с тъждеството
$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k};$$
- За крайната разлика от n-ти ред в т. x_0 е в сила аналитичната формула
$$\Delta^n f_0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_j.$$

Нека сега изведем формулата за интерполационния полином в случая на равноотдалечени възли. За да направим връзка между интерполационната формула и крайната разлика, ще заместим разделената разлика в интерполационния полином във форма на Нютон, с еквивалентния ѝ израз, който получихме:

$$
\begin{aligned}
L_n(f;x) &= \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\ldots,x_k](x-x_0)\ldots(x-x_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1}) \\
&= \Delta^0 f_0 + \Delta^1 f_0(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Нека сега заместим възлите по формулта $x_i = x_0 + ih$:

$$
\begin{aligned}
L_n(f;x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-2h)\ldots(x-x_0-(k-2)h)(x-x_0-(k-1)h).
\end{aligned}
$$

В последното виждаме, че след заместването във всеки множител се повтаря изразът $x - x_0$. Последния ще положим да бъде равен на th, за да можем да изнесем коефициент h от всяка една от скобите в сумата. На практика извършваме смяната $x = x_0 + th$. Заместваме полагането:

$$
\begin{aligned}
L_n(f;x_0+th) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}(th)(th-h)(th-2h)\ldots(th-(k-2)h)(th-(k-1)h) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k!\cancel{h^k}}\cancel{h^k}t(t-1)(t-2)\ldots(t-k+2)(t-k+1).
\end{aligned}
$$

И така, за полагането $x - x_0 = th$ или еквивалентно $x = x_0 + th$, получихме

$$
L_n(f;x) = L_n(f;x_0+th) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k!}t(t-1)(t-2)\ldots(t-k+2)(t-k+1).
$$

В литературата означението $\binom{t}{k}$ се среща при произволни реални стойности на параметъра t. С него се означава биномната функция, която се определя от равенството

$$
\binom{t}{k} := \begin{cases} \dfrac{t(t-1)\ldots(t-k+1)}{k!}, & k > 0, \\ 1, & k = 0. \end{cases}
$$

Неформално, можем да си мислим за горната формула като $\dfrac{t!}{k!(t-k)!}$. От последното следва, че интерполационният полином може да се запише като

$$
L_n(f;x_0+th) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f_0 \binom{t}{k}.
$$

Последната формула се нарича **формула на Нютон за интерполиране напред**. Коефициентите във формулата на Нютон за интерполиране напред лежат отново най-отгоре на всеки стълб в познатата ни вече таблица с крайни разлики за пресмятане на коефициентите.

Направената смяна $x = x_0+th$ всъщност трансформира възлите $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ в редицата $0, 1, \dots, n$. *Проверете сами!*

По подобен начин може да се изведе и формулата за интерполиране назад (вж. лекции). Тя се извежда, като се използва формулата на Нютон, приложена за възлите x_n, x_{n-1}, x_{n-2},..., x_0 (взети в тази последователност), т.е.

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_n, x_{n-1} \dots, x_{n-k}](x - x_n) \dots (x - x_{n-k+1}).$$

След аналогична смяна $x = x_n + th$ се получава **формулата на Нютон за интерполиране назад**

$$L_n(f;x_n + th) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f_{n-k} \binom{t+k-1}{k}.$$

За намирането на полинома по горната формула се използва същата таблица с крайни разлики, като коефициентите се намират на последния ред във всеки един от нейните стълбове.

Нека сега използваме горната формула, за да определим интерполационния полином за дадени равноотдалечени възли и стойности.

Задача 3. Постройте интерполационния полином за таблицата

x	0	1	2	3
f	-4	-3	2	11

като използвате формулата на Нютон за интерполиране напред. Да се изрази полиномът като функция на x.

Решение. Търсим полинома във вида

$$L_3(f;x_0 + th) = \sum_{k=0}^{3} \Delta^k f_0 \binom{t}{k} = \Delta^0 f_0 \binom{t}{0} + \Delta^1 f_0 \binom{t}{1} + \Delta^2 f_0 \binom{t}{2} + \Delta^3 f_0 \binom{t}{3}.$$

Да обърнем внимание, че полиномът се представя по степените на независимата променлива t чрез полиномите

$$\binom{t}{0} = 1, \quad \binom{t}{1} = t, \quad \binom{t}{2} = \frac{t(t-1)}{2!}, \quad \binom{t}{3} = \frac{t(t-1)(t-2)}{3!},$$

т.е. търсеният полином е от π_3. Да построим таблицата с крайни разлики.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3
$x_0 = 0$	$\Delta^0 f_0 = -4$			
		$\Delta^1 f_0 = -3 - (-4) = 1$		
$x_1 = 1$	$\Delta^0 f_1 = -3$		$\Delta^2 f_0 = 5 - 1 = 4$	
		$\Delta^1 f_1 = 2 - (-3) = 5$		$\Delta^3 f_0 = 4 - 4 = 0$
$x_2 = 2$	$\Delta^0 f_2 = 2$		$\Delta^2 f_1 = 9 - 5 = 4$	
		$\Delta^1 f_2 = 11 - 2 = 9$		
$x_3 = 3$	$\Delta^0 f_3 = 11$			

Заместваме полученото в интерполационната формула:

$$L_3(f; x_0 + th) = -4 + 1t + 4\frac{t(t-1)}{2} + 0\frac{t(t-1)(t-2)}{6} = 2t^2 - t - 4.$$

За променливата t имаме $t = \dfrac{x - x_0}{h}$. Заместваме $x_0 = 0, h = 1$ във формулата за t и получаваме $x = x_0 + th = t$. Следователно полиномът като функция на x е

$$L_3(f; x) = 2x^2 - x - 4.$$

□

Задача 4. Решете задача 2, като използвате формулата на Нютон за интерполиране назад.

Решение. За решението на задачата ще използваме коефициентите от схемата с крайните разлики, получена при интерполиране напред от предходната задача. Имаме

$$\begin{aligned} L_3(f; x_3 + th) &= \sum_{k=0}^{3} \Delta^k f_{3-k} \binom{t+k-1}{k} = \Delta^0 f_3 \binom{t-1}{0} + \Delta^1 f_2 \binom{t}{1} + \Delta^2 f_1 \binom{t+1}{2} + \Delta^3 f_0 \binom{t+2}{3} \\ &= 11 + 9t + 4\frac{(t+1)t}{2} + 0\frac{(t+2)(t+1)t}{6} = 2t^2 + 11t + 11. \end{aligned}$$

Нека сега направим смяна към x. Имаме $x = x_3 + th$, $x_3 = 3, h = 1$, откъдето $t = x - 3$. Следователно полиномът е

$$L_3(f; x) = 2(x-3)^2 + 11(x-3) + 11 = 2x^2 - x - 4.$$

□

Разбира се, всички разглеждани до момента формули намират един и същи полином, ако им зададем конкретни възли и стойности. Разликата между формулите за интерполиране напред и интерполиране назад обаче се вижда в следния случай. Нека са ни дадени например 50 равноотдалечени възела $x_0, \ldots, x_{49}$ и съответстващи стойности на дадена функция f в тези точки. Нека построим редица от интерполационни полиноми по формулата за интерполиране напред. Тогава полиномът от първа степен ще интерполира f в точките x_0, x_1; полиномът от втора степен – в точките x_0, x_1, x_2 и т.н. Ако използваме формулата за интерполиране назад, полиномът от първа степен ще използва възли x_n, x_{n-1}; полиномът от втора – възлите x_n, x_{n-1}, x_{n-2} и т.н.

Ако искаме да пресметнем приближено стойността на f в дадена точка, често на практика се подхожда по следния начин. Построява се редица от интерполационни полиноми докато разликата на две съседни приближения стане достатъчно близка, т.е. по-малка от предварително зададен толеранс на грешката. Тогава можем да считаме, че сме намерили стойността с такава точност. Вземайки предвид казаното по-горе е ясно, че ако търсим стойността на f в точка близка до началото на интервала, за предпочитане е да използваме формулата с разлика напред и обратно, ако искаме да намерим стойността на f в точка близка до края на интервала – да използваме формулата с разлика назад.

Да отбележим отново, че формулите с крайни разлики имат следното предимство в сравнение с формулата с разделени разлики – за пресмятането на крайните разлики не се налага да се извършва деление, което е относително бавна и неточна операция в компютъра. Разбира се, недостатък е, че формулите са приложими само за равноотдалечени възли.

Сега ще разгледаме едно интересно приложение на крайните разлики. Ако крайните разлики например от втори ред се нулират, то тогава точките от интерполационната ни таблица ще лежат върху права (коефициентите пред втората и по-високите степени в интерполационния полином ще бъдат нули). Аналогично и за крайните разлики от произволен ред нататък. Нека решим подобен пример.

Задача 5. Като използвате крайни разлики, покажете, че точките лежат върху парабола:

x	0	1	2	3	4	5
y	-3	0	5	12	21	32

Решение. Ще покажем, че всички точки лежат на една парабола, като проверим, че всички крайни разлики от трети ред са 0 (следователно и тези от четвърти и пети ред). Това ще означава, че в интерполационния полином коефициентите пред базисните полиноми от трета, четвърта и пета степен, $\binom{t}{3}$, $\binom{t}{4}$ и $\binom{t}{5}$, са равни на нула и той наистина е от втора степен.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3
0	$\Delta^0 f_0 = -3$			
		$0 - (-3) = 3$		
1	$\Delta^0 f_1 = 0$		$5 - 3 = 2$	
		$5 - 0 = 5$		0
2	$\Delta^0 f_2 = 5$		$7 - 5 = 2$	
		$12 - 5 = 7$		0
3	$\Delta^0 f_3 = 12$		$9 - 7 = 2$	
		$21 - 12 = 9$		0
4	$\Delta^0 f_4 = 21$		$11 - 9 = 2$	
		$32 - 21 = 11$		
5	$\Delta^0 f_5 = 32$			

□

Задача 6. Нека $S_k = 1^2 + \cdots + k^2, k \geq 1$, където $S_0 = 0$. Покажете, че съществува единствен полином $p \in \pi_3$, който интерполира точките S_k, т.е. $p(k) = S_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Намерете S_k, като използвате формулата на Нютон с крайни разлики за интерполиране напред.

Решение. Разглеждаме редицата от числа $S_0, S_1, \ldots S_m, \ldots$ Нека определим полинома, който интерполира стойностите $S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots, S_m$, $m \geq 4$. Знаем, че съществува единствен полином $p(t) \in \pi_m$, за който $p(0) = S_0, p(1) = S_1, p(2) = S_2, \ldots, p(m) = S_m$. От формулата на Нютон с крайни разлики за интерполиране напред имаме

$$p(t) = \sum_{k=0}^{m} \Delta^k S_0 \binom{t}{k}.$$

Ще пресметнем последователно крайните разлики в произволна точка i и ще покажем, че тези от четвърти ред са 0. И така:

$$\begin{aligned}
\Delta^1 S_i &= \Delta^0 S_{i+1} - \Delta^0 S_i = S_{i+1} - S_i = (i+1)^2, \\
\Delta^2 S_i &= \Delta^1 S_{i+1} - \Delta^1 S_i = (i+2)^2 - (i+1)^2 = 2i + 3, \\
\Delta^3 S_i &= \Delta^2 S_{i+1} - \Delta^2 S_i = (2(i+1) + 3) - (2i + 3) = 2, \\
\Delta^4 S_i &= \Delta^3 S_{i+1} - \Delta^3 S_i = 2 - 2 = 0, \ \ i = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned} \tag{4.1}$$

От последното следва, че и крайните разлики от четвърти, пети и по-висок ред във формулата на Нютон с крайни разлики за интерполиране напред, взети в точката $x_0 = 0$, ще са равни на 0. Заместваме:

$$p(t) = \sum_{k=0}^{m} \Delta^k S_0 \binom{t}{k} = \sum_{k=0}^{3} \Delta^k S_0 \binom{t}{k} = \Delta^0 S_0 + \Delta^1 S_0 t + \Delta^2 S_0 \frac{t(t-1)}{2!} + \Delta^3 S_0 \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}.$$

Заместваме $i = 0$ в (4.1) и определяме крайните разлики $\Delta^1 S_0 = 1, \Delta^2 S_0 = 3, \Delta^3 S_0 = 2$. Търсеният полином е

$$p(t) = t + 3\frac{t(t-1)}{2} + 2\frac{t(t-1)(t-2)}{6} = \frac{t(t+1)(2t+1)}{6}.$$

Тъй като $p(k) = S_k$, то

$$S_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

$\square$

Допълнителни задачи

Задача 7. Като използвате формулата на Нютон за интерполиране напред, намерете полинома, който интерполира таблицата.

(а)

x	1	2	3	4	5
y	1	2	6	24	120

(б)

x	2	3	4	5	6
y	3	4.28	5.88	7.80	10.04

Задача 8. Определете стойността на $\sin 52^\circ$, като построите интерполационния полином за таблицата

α°	45	50	55	60
$\sin\alpha$	0.7071	0.7660	0.8192	0.8660

и използвате формулата на Нютон за интерполиране напред.

Задача 9. Като използвате крайни разлики, определете степента на полинома, интерполиращ таблицата.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0	-4	0	6	8	0	-24

Задача 10. Нека $S_k = 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3$, $k \geq 1$, където $S_0 = 0$. Покажете, че съществува единствен полином $p \in \pi_4$, който интерполира точките S_k, т.е. $p(k) = S_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Намерете S_k, като използвате формулата на Нютон с крайни разлики за интерполиране напред.

Задача 11. Нека $S_k = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2$, $k \geq 1$, където $S_0 = 0$. Покажете, че съществува единствен полином $p \in \pi_3$, който интерполира точките S_k, т.е. $p(k) = S_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Намерете S_k, като използвате формулата на Нютон с крайни разлики за интерполиране напред.

Глава 5

Интерполационна задача на Ермит. Разделени разлики с кратни възли

Дотук разгледахме задачата на Лагранж, при която по дадена таблица от стойности намерихме алгебричен полином от π_n, чиято графика минава през съответните точки. В практиката често възникват задачи за приближаване на дадена функция f по зададени условия (информация за стойностите на функцията и нейните производни в дадени точки). Например интересен пример е полиномът на Тейлър, $T_n(x)$, който приближава (апроксимира) дадена функция, като използва една централна точка a, в която знаем стойността на функцията f и нейните производни:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Да забележим, че $T_n(a) = f(a),\ T_n'(a) = f'(a),\ \ldots,\ T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$. Последното означава, че полиномът на Тейлър интерполира функцията заедно с производните ѝ до n-ти ред, включително, взети в точката a.

Бихме могли да си зададем следния въпрос. Можем ли за произволна таблица от $n+1$ стойности на функция f и нейни производни от произволен ред да построим единствен полином от степен, ненадминаваща n? Въпросът какви условия трябва да изпълнява таблицата от стойности, за да се определи единственият полином, който я интерполира, все още няма отговор. Съществуват, разбира се, частни случаи, за които единственост на решението е доказана. Най-важният в практиката случай (след задачата на Лагранж) е задачата на Ермит.

Постановка на интерполационната задача на Ермит. Нека са дадени $n+1$ различни точки $t_0, \ldots, t_n$, съответни на тях цели положителни числа $\nu_0, \ldots, \nu_n$ (още се наричат кратности) и таблица от стойности на функцията f и нейните производни

$$\begin{aligned}
t_0: &\quad f(t_0), f'(t_0), \ldots, f^{(\nu_0-1)}(t_0),\\
t_1: &\quad f(t_1), f'(t_1), \ldots, f^{(\nu_1-1)}(t_1),\\
&\qquad\qquad \vdots\\
t_n: &\quad f(t_n), f'(t_n), \ldots, f^{(\nu_n-1)}(t_n).
\end{aligned}$$

Да се намери полином, който интерполира функцията f и съответните ѝ производни във възлите $t_0, \ldots, t_n$. $\square$

Обърнете внимание, че при постановката на Ермит кратността ν_0 отговаря за броя на условията за функцията в т. t_0 (възелът t_0 е с кратност ν_0); кратността ν_1 – за броя на условията в т. t_1 и т.н. Нещо повече, условията за реда на производните са в непрекъснат ред (например за т. t_0 производните са до ред $\nu_0 - 1$, включително, без да се пропуска условие в предходните производни).
Да отбележим, че интерполирането на производните позволява по-добре да се контролира поведението на търсения интерполационен полином, например да има същата кривина като оригиналната функция и др.

Както виждаме, в постановката на Ермит имаме общо $\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n$ интерполационни условия. Нека въведем означението $N = \nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n - 1$. Тогава задачата на Ермит може да се обобщи така – да се намери полиномът $p \in \pi_N$, който удовлетворява условията

$$p^{(\lambda)}(t_k) = f^{(\lambda)}(t_k),\ k = 0, \ldots, n,\ \lambda = 0, \ldots, \nu_k - 1.$$

Забележка: Когато интерполираме произволни стойности, а не стойности на функция, използваме означението $y_{k\lambda} = f^{(\lambda)}(t_k)$, т.е. търси се полином $p(x)$, който удовлетворява

$$p^{(\lambda)}(t_k) = y_{k\lambda}.$$

Може да се докаже (вж. лекции), че задачата на Ермит има единствено решение и е в сила следната теорема.

Теорема 4. При всеки избор на интерполационните възли $\{t_k\}_0^n$ ($t_i \neq t_j$ при $i \neq j$) и при всяка таблица от стойности $\{y_{k\lambda}\}$ интерполационната задача на Ермит има единствено решение.

Интересно

Полиномът на Ермит се означава с $H_N(f; x)$ в чест на Чарлз Ермит (Charles Hermite). Ермит (1822-1901) има значителни открития в областта на комплексния анализ, в частност теория на уравненията. Един от неговите приноси в областта на математиката е, че през 1873 г. е доказал, че числото e е трансцедентно, т.е. че не е корен на нито едно алгебрично уравнение с цели коефициенти. Вследствие на това, през 1882 г. същото е доказано и за числото π.

Нека сега се спрем на въпроса за построяването на решението на интерполационната задача. Както при тази на Лагранж, решението на задачата на Ермит може да бъде намерено по различни начини. Съществува аналогична формула на тази на Лагранж, както и обобщение на формулата на Нютон с разделени разлики, които ще разгледаме последователно.

Разделени разлики с кратни възли. Интерполационна формула във вид на Нютон

Оказва се, че можем да използваме обобщение на формулата на Нютон и за намиране на полинома на Ермит. В предишното упражнение въведохме понятието разделена разлика, като приехме, че точките са различни. При задачата на Ермит във всяка точка можем да налагаме по няколко условия. Оттук нататък ще приемаме, че ако напишем възлите x_0, x_0, x_1, x_1, x_1, то ще сме наложили условия за функцията и производната ѝ в x_0 (който е двукратен възел), функцията и първите две производни в x_1 (който е трикратен).

Искаме да обобщим понятието разделена разлика така, че да можем да го свържем с понятието производна. Нека дадем прост пример, като разгледаме производната от първи ред. Имаме

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f[x, x_0] = f[x_0, x_0].$$

Ще постъпим аналогично, като разширим понятието разделена разлика по следния начин.

Определение 4. Нека f има непрекъснати производни до ред k включително в $[a, b]$. Разделена разлика от ред k за възлите $x_0 \leq \dots \leq x_n$ от $[a, b]$ дефинираме рекурентно

$$f[x_0, \dots, x_k] = \begin{cases} \dfrac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, \text{ ако } x_0 < x_k, \\ \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \text{ ако } x_0 = x_k. \end{cases}$$

Вече сме готови да се върнем на построяването на интерполационния полином. Нека са дадени възли $t_0 < \dots < t_n$ и техни кратности $\nu_0, \dots, \nu_n$, заедно със стойността на функцията и съответните ѝ производни във всеки от тях. Нека $N + 1$ е общият брой на интерполационни условия, т.е. $N = \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_n - 1$. Нека още означим

$$(x_0, x_1, \dots, x_N) = (\underbrace{t_0, \dots, t_0}_{\nu_0}, \underbrace{t_1, \dots, t_1}_{\nu_1}, \dots, \underbrace{t_n, \dots, t_n}_{\nu_n}).$$

Да обърнем внимание, че от последното следва, че $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N$.

Теорема 5. За полинома на Ермит е в сила формулата

$$H_N(f; x) = \sum_{k=0}^{N} f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}).$$

С други думи, ако искаме да определим полинома на Ермит, ще използваме познатата ни формула на Нютон, като единствената разлика е в това, че сме обобщили понятието разделена разлика. Оказва се, че, така обобщена, тя е точно коефициентът пред x^N в съответния полином на Ермит. Да построим такъв полином.

Задача 1. Като използвате интерполационната формула на Нютон с разделени разлики с кратни възли, намерете интерполационния полином на Ермит, който удовлетворява условията

$$p(0) = -1,\ p'(0) = 1,\ p''(0) = 2,\ p(1) = 0,\ p'(1) = -1.$$

Представете полинома по степените на x.

Решение. Искаме да интерполираме таблицата

$x_0 = 0$	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = 1$	$x_4 = 1$
$f(0) = -1$	$f'(0) = 1$	$f''(0) = 2$	$f(1) = 0$	$f'(1) = -1$

В условието на задачата са ни дадени пет интерполационни условия, следователно търсим полинома $H_4(f; x) \in \pi_4$ с явен вид

$$H_4(f; x) = f[0] + f[0,0](x-0) + f[0,0,0](x-0)(x-0) + f[0,0,0,1](x-0)^3 + f[0,0,0,1,1](x-0)^3(x-1).$$

Ще използваме познатата ни схема. За улеснение ще слагаме звезда на тези разделени разлики, които включват само кратни възли.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3	Ред 4
$x_0 = 0$	$f[x_0] = -1$				
		$f[x_0, x_1]^* = 1$			
$x_1 = 0$	$f[x_1] = -1$		$f[x_0, x_1, x_2]^* = 1$		
		$f[x_1, x_2]^* = 1$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -1$	
$x_2 = 0$	$f[x_2] = -1$		$f[x_1, x_2, x_3] = 0$		$f[x_0, \ldots, x_4] = -1$
		$f[x_2, x_3] = 1$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = -2$	
$x_3 = 1$	$f[x_3] = 0$		$f[x_2, x_3, x_4] = -2$		
		$f[x_3, x_4]^* = -1$			
$x_4 = 1$	$f[x_4] = 0$				

- Разделени разлики от първи ред:

$$f[x_0, x_1]^* = \frac{f'(x_0)}{1!} = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1!} = 1; \qquad f[x_1, x_2]^* = \frac{f'(x_1)}{1!} = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1!} = 1;$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = 1; \qquad f[x_3, x_4]^* = \frac{f'(x_3)}{1!} = \frac{f'(1)}{1!} = \frac{-1}{1!} = -1.$$

- Разделени разлики от втори ред:

$$f[x_0, x_1, x_2]^* = \frac{f''(x_0)}{2!} = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{2}{2!} = 1; \qquad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = 0;$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2} = \frac{-1 - 1}{1 - 0} = -2.$$

- Разделени разлики от 3 и 4-ти ред:

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{0 - 1}{1} = -1;$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1} = \frac{-2 - 0}{1} = -2;$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0} = \frac{-2 - (-1)}{1 - 0} = -1.$$

Остава да заместим получените разделени разлики във формулата за полинома на Ермит:

$$\begin{aligned} H_4(f; x) &= -1 + 1(x - 0) + 1(x - 0)^2 - 1(x - 0)^3 - 1(x - 0)^3(x - 1) \\ &= -1 + x + x^2 - x^3 - x^4 + x^3 = -x^4 + x^2 + x - 1. \end{aligned}$$

□

Забележка: Важно е да отбележим, че интерполационната задача на Ермит включва условия за функцията и производните ѝ, като те се взимат в последователен ред. Така например, ако сменим условието на горната задача на

$$p(0) = -1, \;\; p''(0) = 2, \;\; p(1) = 0, \;\; p'(1) = -1,$$

то задачата вече не е интерполационна задача на Ермит, защото липсва условие за $p'(0)$. В общия случай не можем да твърдим съществуване и единственост на решението.

Интерполационна формула във вид на Лагранж

Ще разгледаме формулата в един частен случай, при който $\nu_0 = \nu_1 = \dots = \nu_n = 2$. Да припомним задачата. Нека са дадени възли $x_0, x_1, \dots, x_n$. Търсим полинома на Ермит от степен $2n+1$ (за всеки възел имаме 2 условия – за стойността на функцията и първата ѝ производна, откъдето имаме общо $2(n+1)$ условия), който интерполира функцията и нейната производна във всяка от точките $x_0, \dots, x_n$. За целта да означим:

- стойността на функцията f в т. x_k с y_k;
- стойността на производната на f в т. x_k с y'_k;

Теорема 6. Нека $x_0, \dots, x_n$ са произволни различни точки от реалната права. Тогава при всеки избор на числата $y_0, \dots, y_n$ и $y'_0, \dots, y'_n$ полиномът

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \left\{1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right\} \left(\frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}\right)^2 + \sum_{k=0}^{n} y'_k \left\{\frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}\right\}^2 (x - x_k)$$

е от степен, ненадминаваща $2n+1$, и удовлетворява условията

$$p(x_k) = y_k,\ p'(x_k) = y'_k,\ k = 0, \dots, n.$$

Идея на доказателството. Аналогично на задачата на Лагранж, полиномът се търси във вида

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(y_k H_{k0}(x) + y'_k H_{k1}(x)\right),$$

където $H_{k0},\ H_{k1} \in \pi_{2n+1}$ са базисните полиноми, удовлетворяващи интерполационните условия:

$$\begin{aligned} H_{k0}(x_i) &= \delta_{ki}, \qquad & H'_{k0}(x_i) &= 0, \\ H_{k1}(x_i) &= 0, \qquad & H'_{k1}(x_i) &= \delta_{ki}, \end{aligned}$$

$k = 0, \dots, n,\ i = 0, \dots, n$. Символът δ_{ki} е познатият ни символ на Кронекер

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq i, \\ 1, & \text{при } k = i. \end{cases}$$

С други думи, за всеки възел x_k отговарят два базисни полинома – H_{k0} за интерполационните условия за стойностите на функцията и H_{k1} за интерполационните условия за стойностите на производната ѝ. Аналитичният вид на базисните полиноми се намира от интерполационните условия, които изпълняват, като получаваме

$$H_{k0}(x) = \left\{1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right\} \underbrace{\left(\frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}\right)^2}_{l_{kn}^2(x)} = \left\{1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right\} l_{kn}^2(x);$$

$$H_{k1}(x) = \left\{\frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}\right\}^2 (x - x_k) = l_{kn}^2(x)(x - x_k).$$

□

В общия случай извеждането на явния вид на полинома е доста трудоемко, затова няма да се спираме на него тук. Сега ще разгледаме една задача, тясно свързана с горната теорема.

Задача 2. Нека $l_{kn}(x)$, $k = \overline{0,n}$, са базисните полиноми на Лагранж, съответни на възлите $x_0, \dots, x_n$, и

$$\varphi_k(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right) l_{kn}^2(x).$$

Докажете, че

$$\varphi_k'(x_k) = 0, k = \overline{0,n}.$$

Доказателство. Преди да докажем твърдението от условието на задачата, да обърнем внимание, че това е базисният полином $H_{k0}(x)$, който отговаря за интерполационното условие за стойността на полинома във възела x_k. За него искаме да покажем, че производната му се нулира в този възел, което от своя страна ще позволи стойността на производната на полинома $p(x)$ в тази точка да се контролира от коефициента пред k-тата базисна функция $H_{k1}(x)$.
И така, имаме

$$\begin{aligned}\varphi_k'(x) &= \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right)' l_{kn}^2(x) + \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right) \left(l_{kn}^2(x)\right)' \\ &= -\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} l_{kn}^2(x) + \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right) \left(2 l_{kn}(x) l_{kn}'(x)\right).\end{aligned}$$

Искаме да пресметнем $\varphi_k'(x_k)$. Полагаме $x = x_k$ в горната функция, заместваме $l_{kn}(x_k) = 1$ и получаваме

$$\varphi_k'(x_k) = -\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} + 2 l_{kn}'(x_k). \tag{5.1}$$

Остава да пресметнем производната на базисния полином на Лагранж в точката x_k. За тази цел ще използваме представянето му

$$l_{kn}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}.$$

Да пресметнем производната на последното.

$$\begin{aligned}l_{kn}'(x) &= \frac{1}{\omega'(x_k)} \left(\frac{\omega(x)}{x - x_k}\right)' \\ \Rightarrow l_{kn}'(x_k) &= \frac{1}{\omega'(x_k)} \left(\frac{\omega(x)}{x - x_k}\right)'\Bigg|_{x=x_k} = \frac{1}{\omega'(x_k)} \left(\frac{\omega'(x)(x - x_k) - \omega(x).1}{(x - x_k)^2}\right)\Bigg|_{x=x_k}\end{aligned}$$

Формално горният израз не е дефиниран (ако заместим с $x = x_k$, ще получим частно $0/0$), той трябва да се интерпретира като граница при $x \to x_k$, т.е.

$$l_{kn}'(x_k) = \lim_{x \to x_k} l_{kn}'(x) = \lim_{x \to x_k} \left(\frac{\omega'(x)(x - x_k) - \omega(x)}{(x - x_k)^2}\right).$$

Имаме

$$\begin{aligned}\left(\frac{\omega'(x)(x - x_k) - \omega(x)}{(x - x_k)^2}\right)\Bigg|_{x=x_k} &= \lim_{x \to x_k} \frac{\omega'(x)(x - x_k) - \omega(x)}{(x - x_k)^2} \\ &\overset{L'H}{=} \lim_{x \to x_k} \frac{\omega''(x)(x - x_k) + \cancel{\omega'(x)} - \cancel{\omega'(x)}}{2(x - x_k)} = \frac{\omega''(x_k)}{2}.\end{aligned}$$

От последното следва, че за базисния полином на Лагранж е в сила $l'_{kn}(x_k) = \dfrac{\omega''(x_k)}{2\omega'(x_k)}$. Заместваме полученото в (5.1) и получаваме търсеното равенство. $\square$

Теорема за оценка на грешката

Оказва се, че за задачата на Ермит също може да се даде оценка на грешката, която правим при приближение $f(x) \approx H_N(f;x)$.

Теорема 7. Нека $a \le x_0 < \dots < x_n \le b$ са дадени възли, $\{\nu_k\}_0^N$ са произволни цели положителни числа (техни кратности) и функцията f има непрекъсната $(N+1)$-ва производна в $[a,b]$, където $N = \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_n - 1$. Тогава за всяко $x \in [a,b]$, съществува число $\xi \in [a,b]$ такова, че

$$f(x) - H_N(f;x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{\nu_0}\dots(x-x_n)^{\nu_n}.$$

Задача 3. Нека $f(x) = e^x$ и $H_3(f;x)$ интерполира f в точките 0 и 1 с кратност 2. Като използвате теоремата за оценка на грешката, покажете, че е в сила

$$|f(x) - H_3(f;x)| < \frac{1}{2^7}.$$

Допълнителни задачи

Задача 4. Като използвате интерполационната формула на Нютон с разделени разлики с кратни възли, намерете интерполационния полином на Ермит, който удовлетворява интерполационните условия. Представете $p(x)$ по степените на x.

(а) $p(0) = -1$, $p'(0) = 2$, $p''(0) = 0$, $p(1) = 3$;

(б) $p(0) = -4, p(1) = -1, p'(1) = 4, p''(1) = 4, p(2) = 6$.

Задача 5. Намерете интерполационния полином, който удовлетворява интерполационните условия:

(а)

x	-1	2
$f(x)$	-2	1
$f'(x)$	7	4

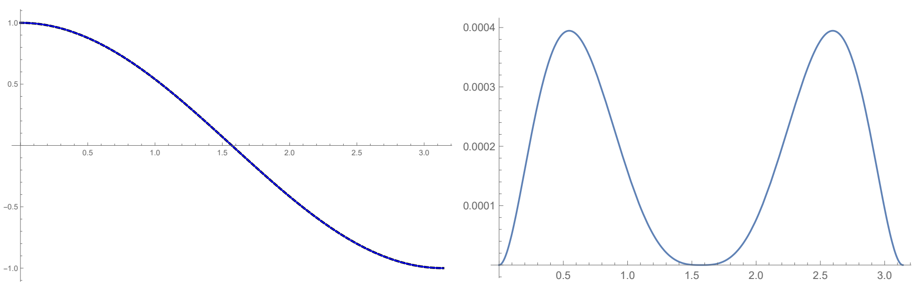
(б) $p(-1) = -2$, $p'(-1) = 7$, $p(2) = 1$.

Задача 6. Намерете полинома на Ермит за таблицата:

0	0	0	1	2
-1	0	0	0	7

Задача 7. Нека $f(x) = \cos x$ и $H_5(f;x)$ интерполира f в точките $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi$ с кратност равна на 2. Дайте оценка на грешката.

Забележка: На фигурата вляво може да видите графиките на $f(x) = \cos x$ (с черен пунктир) и на полинома $H_5(f;x)$ (в синьо), построени в една координатна система, а вдясно – графиката на грешката $|f(x) - H_5(f;x)|$.



От графиката на грешката се вижда, че в действителност тя не надминава 0.0004. А вие каква оценка на грешката получихте?

Глава 6

Системи на Чебишов. Интерполиране с тригонометрични полиноми

6.1 Системи на Чебишов

Дотук разгледахме задачата за приближаване на функция с алгебричен полином, който я интерполира в краен брой точки, т.е. търсихме функция от вида

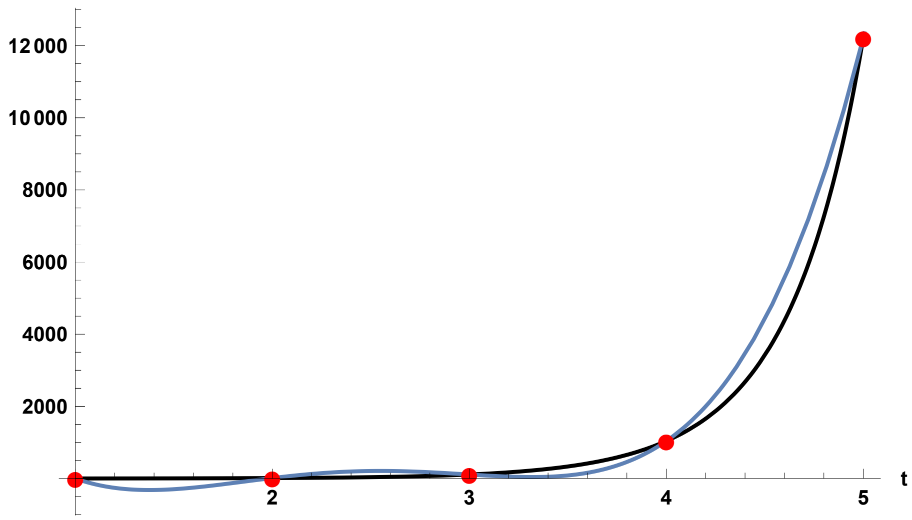
$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x), \tag{6.1}$$

където $\varphi_i(x), i = \overline{0, n}$, образуват базис на пространството π_n. Да обърнем внимание, че освен стандартния базис $1, x, x^2, \ldots, x^n$, ние използвахме Лагранжевия базис $l_0(x), \ldots, l_n(x)$ и Нютоновия базис $1,\ x - x_0,\ (x - x_0)(x - x_1), \ldots, (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$. Тези базиси ни помагат лесно да определим неизвестните коефициенти в полинома. Естествено е изборът на функцията, с която апроксимираме, да зависи от процеса, който искаме да опишем. Например, ако имаме експериментални данни за някакъв периодичен процес, бихме искали да моделираме процеса с периодична функция; растежът на микроорганизми често има експоненциален характер и т.н.

И така, ако искаме да определим подходящо приближение на дадена функция (в нашия случай чрез интерполация), в зависимост от процеса може да се наложи да работим с други базиси в някое друго крайномерно линейно пространство. Такива например са:

- Пространството от тригонометрични полиноми от ред n. Често използван базис на това пространство е
$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx;$$
- Пространството от експоненциални полиноми. Примерен негов базис е
$$1, e^x, e^{2x}, \ldots, e^{nx}.$$

Едно от значенията на това по какъв базис се избира полиномът, който интерполира дадени данни (или функция) е илюстрирано със следващата графика. На Фиг. 6.1 в червено са дадени измервания за развитието на бактериална популация (време/брой клетки$\times$1000), в синьо е построеният съответно алгебричен полином, а в черно – експоненциален полином по базиса $1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}$. От графиката можем да забележим, че в интервала $[1, 2]$ алгебричният полином има отрицателни стойности (което е недопустима стойност за брой клетки), докато експоненциалният полином е положителен за всяко x в интервала на интерполация. Експоненциалният полином описва добре и монотонния растеж на данните. Това е именно причината в този случай да е по-подходящо да се използва експоненциален базис.



Фигура 6.1: Приближаване на данни за бактериален растеж с алгебричен полином (в синьо) и с експоненциален полином (в черно).

Обикновено, когато искаме да намерим някакво приближение, го търсим в **крайномерно линейно пространство**. Причината за това е следната – всяко крайномерно пространство има **краен брой базисни функции**, а всяка функция от дадено **линейно пространство** може да се представи като **линейна комбинация на базисните му функции**. Така всяка функция от едно линейно крайномерно пространство може да се зададе като **крайна линейна комбинация**. С други думи, ако искаме да определим конкретна функция от крайномерно линейно пространство, то трябва да определим краен брой числа – нейните коефициенти в линейната комбинация. И така, ако искаме да приближим произволна функция f с функция от някакво крайномерно пространство (пространството от алгебрични полиноми, пространството от експоненциални полиноми, пространството от тригонометрични полиноми и т.н.), трябва да определим коефициентите в представянето в това пространство, виж Фиг. 6.2.

Нека сега разгледаме задачата за намиране на интерполационен полином от произволно дадено крайномерно линейно пространство.

Определение 5. Нека $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ са дадени линейно независими и непрекъснати функции в $[a, b]$. Линейната комбинация

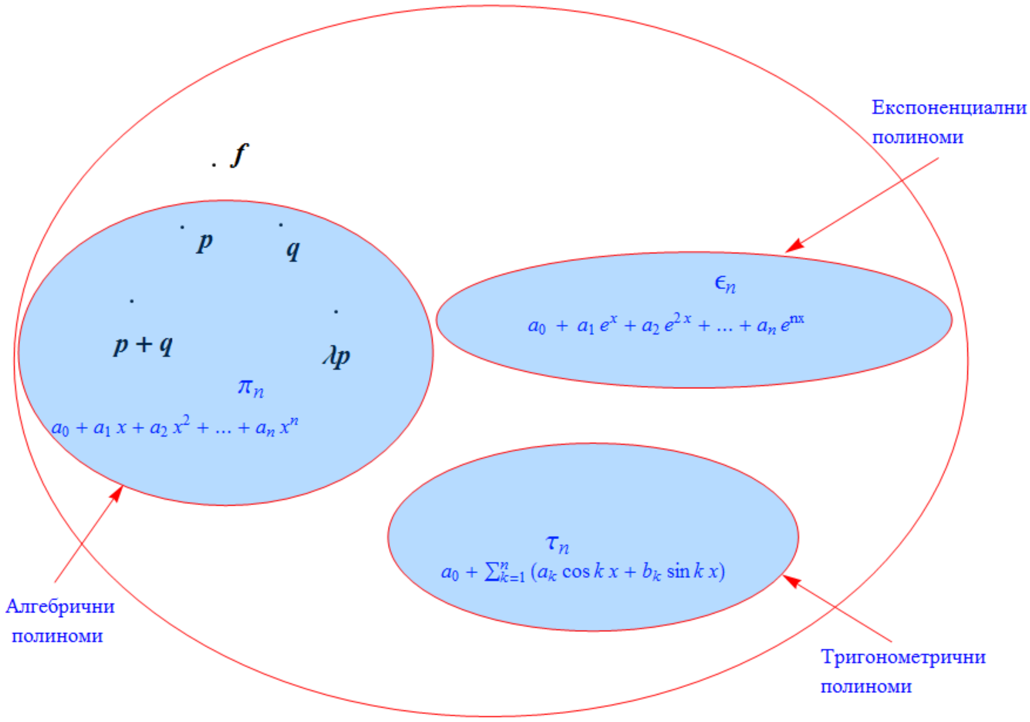
$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)$$

ще наричаме *обобщен полином по системата от функции* $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$.

Обща интерполационна задача

Нека в $[a, b]$ са дадени възли $x_0 < \dots < x_n$ и $y_0, \dots, y_n$ са дадени стойности. Търсим обобщен полином $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x)+\dots+a_n\varphi_n(x)$, който да удовлетворява интерполационните условия

$$\varphi(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n. \tag{6.2}$$



Фигура 6.2: Приближаване на произволна функция f чрез пространството от алгебрични, експоненциални или тригонометрични полиноми.

Последната задача може да се запише като линейна система по отношение на неизвестните коефициенти $a_0, \dots, a_n$:

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Следователно интерполационната задача (6.2) има единствено решение тогава и само тогава, когато детерминантата на матрицата на системата е различна от 0. Матрицата на системата ще бележим с $D[x_0, \dots, x_n]$. Оказва се, че единствеността на решението на общата интерполационна задача може да се покаже и по друг начин, като се провери дали системата от функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ изпълнява условието да бъде **система на Чебишов**.

Определение 6. Казваме, че функциите $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ образуват **система на Чебишов** (в литературата още се среща като T-система) **в интервала** I, ако всеки **ненулев** обобщен полином по тази система има най-много n различни нули в I.

Да припомним, че ненулев полином означава, че поне един от коефициентите в представянето му (6.1) е различен от 0. И така, в сила е следната теорема, която показва, че ако системата $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ е Чебишова в даден интервал I, то общата интерполационна задача по тази система има единствено решение за всеки избор на възли от този интервал.

Теорема 8. Функциите $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ образуват система на Чебишов в интервала I тогава и само тогава, когато за **всеки избор** на точки $x_0 < \dots < x_n$ от I

$$\det D[x_0, \dots, x_n] \neq 0.$$

С други думи, последната теорема ни казва, че достатъчно условие общата интерполационна задача да има единствено решение за всеки избор на възлите е базисните функции на крайномерното пространство, в което търсим решение, да образуват система на Чебишов.

Пример 3. Най-простият пример за Чебишова система е системата от функции $\varphi_k(x) = x^k$. От основната теорема на алгебрата знаем, че всеки алгебричен полином

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

има най-много n различни нули, което означава, че системата е Чебишова. За интерполационната задача, в която търсим приближаващ алгебричен полином, вече показахме, че решението е единствено, когато възлите на интерполация са различни.

Задача 1. Да се докаже, че $\{x^{2k+1}\}_{k=0}^{n}$ образуват Чебишова система в произволен интервал $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta$.

Доказателство. Нека

$$\varphi(x) = a_0 x + a_1 x^3 + \cdots + a_n x^{2n+1}$$

е произволен обобщен полином по тази система. Ще покажем, че той има не повече от n различни нули във всеки интервал $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta$, като го сведем чрез полагане до алгебрично уравнение от степен n. Да разгледаме уравнението

$$a_0 x + a_1 x^3 + \cdots + a_n x^{2n+1} = 0.$$

Тъй като $x = 0$ не е в интервала $[\alpha, \beta]$, то можем да разделим на x двете страни на последното уравнение:

$$a_0 + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{2n} = 0. \tag{6.3}$$

Полагаме $y = x^2$, за да сведем горното уравнение до алгебрично уравнение от степен n:

$$a_0 + a_1 y + \cdots + a_n y^n = 0.$$

От основната теорема на алгебрата знаем, че това уравнение има най-много n различни реални корена. Тъй като $x = \pm\sqrt{y}$ има най-много едно положително решение (ако $y > 0$, имаме решение $x = \sqrt{y}$), то на всяко y се съпоставя най-много едно положително число x, което да принадлежи на $[\alpha, \beta]$. Така (6.3) има най-много n различни корена в съответния интервал, т.е. системата е Чебишова в съответния интервал.

Забележка: Да обърнем внимание, че интервалът, в който изследваме системата функции е от съществено значение. В този случай използвахме, че корените на уравнението трябва да са положителни. □

Преди да докажем следващата задача, ще припомним теоремата на Рол, върху която ще базираме доказателството си.

Теорема 9 (Теорема на Рол). Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, диференцируема в отворения интервал (a, b) и приема равни стойности в двата края на интервала, т.е. $f(a) = f(b)$. Тогава $\exists \xi \in [a, b]$, за която $f'(\xi) = 0$.

Задача 2. Докажете, че $\{1, e^{2x}, e^{5x^2}\}$ образуват система на Чебишов в $(-\infty, +\infty)$.

Доказателство. За да бъде системата Чебишова, трябва всеки ненулев обобщен полином

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 e^{2x} + a_2 e^{5x^2}$$

да има най-много 2 различни нули в $(-\infty, +\infty)$. Да допуснем противното. Нека обобщеният полином има три различни нули в $(-\infty, \infty)$. Ще докажем, че тогава $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, т.е. $\varphi(x) \equiv 0$ е нулевият полином и достигаме до противоречие.

Тъй като $\varphi(x)$ има 3 различни нули, то от теоремата на Рол следва, че $\varphi'(x)$ трябва да има поне 2 различни нули (в нашия случай функцията φ приема равни стойности в своите корени – там тя е нула, което означава, че между всеки два корена съществува поне една точка, в която производната се нулира). Имаме

$$\varphi'(x) = 2a_1 e^{2x} + 10a_2 x e^{5x^2} = 2e^{2x}\left(a_1 + 5a_2 x e^{5x^2-2x}\right).$$

Нека означим $g(x) := a_1 + 5a_2 x e^{5x^2-2x}$. Тъй като $e^{2x} > 0, \forall x$, то нулите на $\varphi'(x)$ съвпадат с нулите на $g(x)$. Така $g(x)$ има поне 2 различни нули в $(-\infty, +\infty)$. Отново по теоремата на Рол следва, че $g'(x)$ има поне една нула, т.е.

$$\underbrace{5a_2 e^{5x^2-2x} + 5a_2 x e^{5x^2-2x}(10x-2)}_{g'(x)} = 0$$

има поне 1 решение. Изнасяме общ множител от лявата страна на последното уравнение и получаваме

$$5a_2 \underbrace{e^{5x^2-2x}}_{\neq 0} \underbrace{(10x^2 - 2x + 1)}_{\neq 0} = 0.$$

Последното влече $a_2 = 0$. Така $\varphi'(x) = 0 \iff a_2 = a_1 = 0$ и следователно $\varphi(x) = 0 \iff a_2 = a_1 = a_0 = 0$. Достигнахме до противоречие, защото по условие $\varphi(x)$ е ненулев обобщен полином. Следователно $\varphi(x)$ има най-много 2 нули в $(-\infty, +\infty)$. $\square$

Задача 3. Нека функциите $\{\varphi_k(x)\}_0^n$ образуват система на Чебишов в $[a, b]$ и $\psi(x) > 0$ при $x \in [a, b]$. Да се докаже, че функциите $\{\psi(x)\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ също образуват система на Чебишов в $[a, b]$.

Доказателство. Да разгледаме системата от функции $\{\psi(x)\varphi_k(x)\}_0^n$. Произволен обобщен полином по последната система има вида

$$\Psi(x) = a_0\psi(x)\varphi_0(x) + \cdots + a_n\psi(x)\varphi_n(x).$$

Изнасяме $\psi(x)$ пред скоби и получаваме

$$\Psi(x) = \psi(x)\left(a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)\right).$$

Тъй като $a_0\varphi_0(x), \ldots, a_n\varphi_n(x)$ е обобщен полином по системата $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$, която е Чебишова, а $\psi(x) > 0$ по условие, то $\Psi(x)$ има толкова нули, колкото линейната комбинация $a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$, т.е. има най-много n различни нули. $\square$

Нека сега разгледаме пример за една Чебишова система, в която ясно се вижда значението на интервала I.

Задача 4. Да се докаже, че $\{1, \cos x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[0, \pi]$, но не и в интервала $[0, 2\pi]$.

Доказателство. Ще докажем, че обобщеният полином

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 \cos x$$

има най-много една нула в интервала $[0, \pi]$. Да отбележим, че условието $a_1 = 0$ влече $a_0 = 0$, което означава, че $\varphi(x)$ в този случай е нулевият полином. Следователно ние се интересуваме от случая, в който $a_1 \neq 0$. От $a_0 + a_1 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\dfrac{a_0}{a_1}$. Тъй като в интервала $[0, \pi]$ е в сила $-1 \leq \cos x \leq 1$, то ако $-1 \leq -\dfrac{a_0}{a_1} \leq 1$ задачата ще има едно решение, а в противен случай – няма да има. С други думи, обобщеният полином по системата има най-много една нула, следователно системата е Чебишова.

Да разгледаме сега интервала $[0, 2\pi]$. Достатъчно е да покажем, че съществува полином, който има повече от 1 нула. Да разгледаме например полинома

$$\psi(x) = 0.1 + 1.\cos x = \cos x \quad (a_0 = 0,\ a_1 = 1).$$

В интервала $[0, 2\pi]$ последният има два корена $\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{3\pi}{2}$, което означава, че системата не е Чебишова в този интервал. □

И така, показахме, че системата от функции не е Чебишова в $[0, 2\pi]$. Това означава, че произволен избор на интерполационни възли в този интервал не може да ни гарантира съществуване и единственост на решението. Да илюстрираме това с пример.

Пример 4. Да се намери обобщен полином по базиса $\{1, \cos x\}$, който интерполира таблицата

(а)

x	0	2π
$\varphi(x)$	0	2

(б)

x	0	2π
$\varphi(x)$	0	0

Решение. Коефициентите в обобщения полином $\varphi(x) = a_0.1 + a_1.\cos x$ ще намерим, като решим системата уравнения, получена от интерполационните условия.

(а) Заместваме интерполационните условия и получаваме

$$\left| \begin{array}{l} a_0.1 + a_1.1 = 0 \\ a_0.1 + a_1.1 = 2 \end{array} \right. .$$

Очевидно в този случай задачата няма решение.

(б) Получената система

$$\left| \begin{array}{l} a_0.1 + a_1.1 = 0 \\ a_0.1 + a_1.1 = 2 \end{array} \right.$$

има безброй много решения.

Както виждаме, тъй като системата не е Чебишова в интервала $[0, 2\pi]$, то съществуването и единствеността на решението на интерполационната задача не може да се гарантира за произволен избор на възли от този интервал.

Да обърнем внимание, че една система може да не е Чебишова в даден интервал, но възлите могат да се изберат така, че въпреки това интерполационната задача да има единствено решение.
Например за възлите $x_0 = 0, x_1 = 3\pi/2$, които лежат в $[0, 2\pi]$, задачата

x	0	$3\pi/2$
$\varphi(x)$	0	2

има единствено решение $\varphi(x) = 2 - 2\cos x$.

□

Задача 5. Да се докаже, че функциите $\{\cos(kx)\}_{k=0}^{n}$ образуват система на Чебишов в интервала $[0, \pi]$.

Доказателство. Нека

$$\varphi(x) = a_0.1 + a_1.\cos x + a_2.\cos 2x + \cdots + a_n.\cos nx$$

е произволен ненулев обобщен полином по системата. Да допуснем, че полиномът има $n+1$ различни нули в интервала $[0, \pi]$. Ще покажем, че от допуснатото следва, че полиномът $\varphi(x)$ съвпада с нулевия полином, което е в противоречие с неговото построение.

Да направим смяна $x = \arccos t$ и да означим $\psi(t) = \varphi(\arccos t)$. Тъй като $x \in [0, \pi]$, то $t \in [-1, 1]$. Заместваме смяната в обобщения полином и получаваме

$$\begin{aligned}\psi(t) &= a_0 + a_1 \cos(\arccos t) + a_2 \cos(2\arccos t) + \cdots + a_n \cos(n \arccos t)\\ &= a_0 T_0(t) + a_1 T_1(t) + \cdots + a_n T_n(t),\end{aligned}$$

където $T_k(x)$ е k-тият полином на Чебишов от I род. Тъй като $T_k(t) \in \pi_k$ (виж упражнението за полиноми на Чебишов), то $\psi(t) \in \pi_n$. От друга страна, допуснахме, че полиномът има $n+1$ различни нули, т.е. $\psi(t) \equiv 0$ и достигнахме до противоречие. Следователно полиномът има не повече от n различни нули в $[0, \pi]$. □

6.2 Интерполиране с тригонометрични полиноми

Нека сега се спрем на задачата за интерполиране с тригонометрични полиноми. На нея ще отделим специално внимание, предвид факта, че много често в практиката се налага работата с периодични данни, т.е. се изисква работа с периодични функции.

Вече показахме, че системата от функции $\{\cos kx\}_{k=0}^{n}$ образува система на Чебишов в интервала $[0, \pi]$. Оказва се, че функциите

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx,$$

също образуват система на Чебишов – в интервала $[0, 2\pi)$. Полином, представен именно по тази система от функции, ще наричаме **тригонометричен полином**.

Определение 7. Израз от вида

$$\tau_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

наричаме тригонометричен полином от ред n.

Да обърнем внимание, че тригонометричният полином от ред n има в представянето си $2n+1$ на брой събираеми. Например:

- $\tau_1(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x;$
- $\tau_2(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x;$

и т.н.

Фактът, че функциите от представянето на тригонометричния полином образуват Чебишова система в $[0, 2\pi)$, следва от доказаната на лекции следваща лема.

Лема 2. Всеки ненулев тригонометричен полином от ред n има не повече от $2n$ различни нули в $[0, 2\pi)$.

Като следствие на горната лема може да се покаже, че системата е Чебишова и във всеки от интервалите $[\alpha, \alpha + 2\pi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. От последното и от теоремата за единствеността на решението на обобщената интерполационна задача можем да формулираме следващата теорема.

Теорема 10. Нека $\alpha \leq x_0 < \cdots < x_{2n} < \alpha + 2\pi$. Тогава за всяка функция f, определена в точките $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$, съществува единствен тригонометричен полином от ред n такъв, че $\tau_n(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, 2n}$.

Да обърнем внимание, че тригонометричният полином от ред n, който се представя по функциите

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx,$$

има $2n+1$ коефициента и следователно за него трябва да се наложат $2n+1$ интерполационни условия.

Както вече казахме, когато разглеждаме дадена задача, често е полезно да имаме няколко различни начина за намирането на решението ѝ – например за решаване на интерполационните задачи можем да подходим чрез решаване на система, намиране на аналитична формула и т.н. Да разгледаме един пример за намирането на тригонометричен полином чрез решаването на получената от интерполационните условия система в програмата *Wolfram Mathematica*.

Пример 5. Да се намери тригонометричният полином, интерполиращ таблицата

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/2$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$
y	0.1	0.807107	1.1	0.807107	0.1	−0.607107	−0.9

Решение. Нека първо обърнем внимание, че данните се съдържат в интервал с дължина 2π и следователно ще имаме единствено решение. Тъй като имаме седем интерполационни условия, то интерполационния полином ще търсим във вида

$$\tau(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x + a_3 \cos 2x + a_4 \sin 2x + a_5 \cos 3x + a_6 \sin 3x.$$

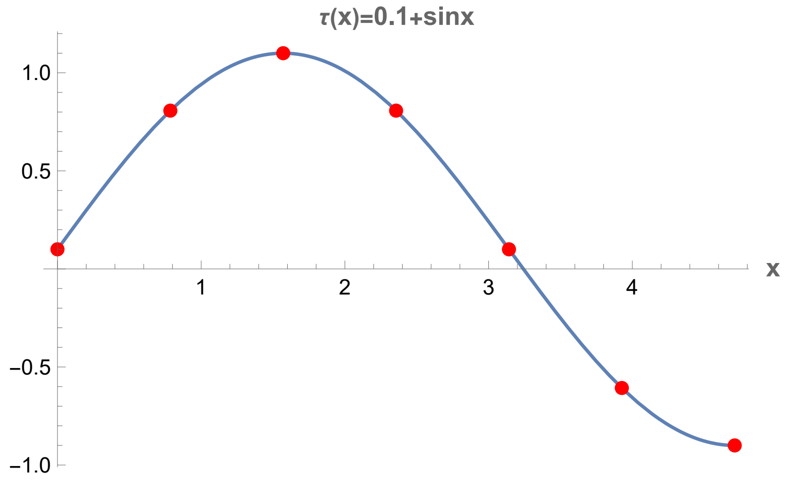
Последния можем да намерим, като решим системата, получена от интерполационните условия

$$\tau(x_0) = y_0,\ \tau(x_1) = y_1, \dots,\ \tau(x_6) = y_6.$$

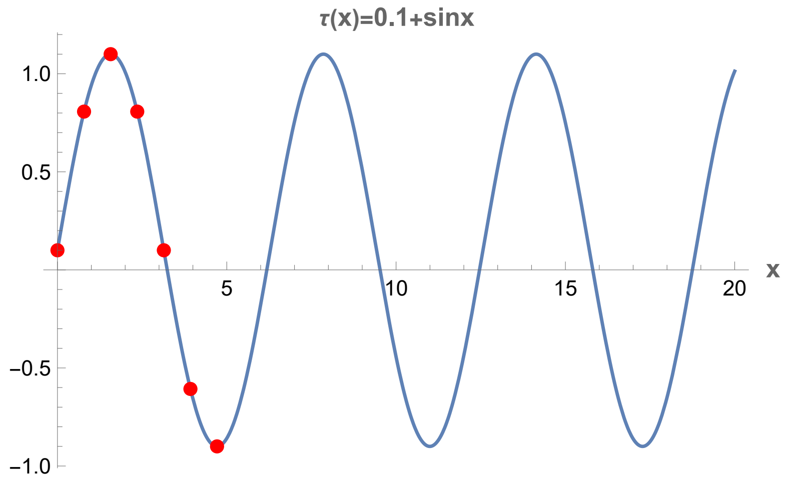
Решаваме съответната система като използваме вградената функция *Solve* във *Wolfram Mathematica*:

```
τ[x_] = a0 + a1 Cos[x] + a2 Sin[x] + a3 Cos[2 x] + a4 Sin[2 x] + a5 Cos[3 x] + a6 Sin[3 x];
Solve[{τ[0] == 0.1 && τ[Pi / 4] == 0.807107 && τ[Pi / 2] == 1.1 && τ[3 Pi / 4] == 0.807107 &&
    τ[Pi] == 0.1 && τ[5 Pi / 4] == -0.607107 && τ[3 Pi / 2] == -0.9}, {a0, a1, a2, a3, a4, a5, a6}]
```

На следващата графика може да видим получения интерполационен полином $\tau(x) = 0.1 + \sin x$ заедно с данните от таблицата:



Да обърнем внимание, че тригонометричният полином, който интерполира данните, е 2π-периодична функция:



$\square$

Оказва се, че за задачата за интерполация с тригонометрични полиноми също съществува аналитична формула за намирането на интерполационния полином. Постъпвайки аналогично на формулата на Лагранж, търсим полинома във вида

$$\tau_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k)\lambda_k(x),$$

където базисните функции са тригонометрични полиноми, които удовлетворяват условията $\lambda_k(x_i) = \delta_{ki}$. Такъв базис, който удовлетворява дадените условия, се нарича интерполационен базис.

Теорема 11. Нека $\{x_k\}_{k=0}^{2n}$ са произволни точки, такива че $\alpha \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} < \alpha + 2\pi$ за някакво α и f е произволна функция, определена в тях. Тогава

$$\tau_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \prod_{i=0, i\neq k}^{2n} \frac{\sin \dfrac{x - x_i}{2}}{\sin \dfrac{x_k - x_i}{2}}$$

е единственият тригонометричен полином от ред n, който интерполира f в $x_0, \ldots, x_{2n}$.

Както виждаме, е много удобно, ако можем да въведем интерполационен базис в пространството, защото тогава можем да напишем проста формула за решението на интерполационната задача, която е аналог на формулата на Лагранж. При интерполирането с алгебрични полиноми, вече показахме, че съществуват удобни интерполационни формули в случая на **равноотдалечени възли**. Оказва се, че такава формула може да се изведе и за тригонометричните полиноми.

Теорема 12. Нека са дадени $2n+1$ равноотдалечени възела в интервала $[0, 2\pi)$, по-точно $x_k = \dfrac{2k\pi}{2n+1}, k = \overline{0, 2n}$. Тогава за тригонометричния полином $\tau_n(x)$, който интерполира функцията $f(x)$ в тези възли, е в сила формулата

$$\tau(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos kx + B_k \sin kx\right),$$

където

$$A_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} y_i \cos(kx_i),\ k = \overline{0, n}, \quad B_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} y_i \sin(kx_i),\ k = \overline{1, n}.$$

Обърнете внимание, че знаменателят $2n+1$ в коефициентите пред сумите в представянето за A_k, B_k е точно равен на броя на интерполационните възли в съответната интерполационна задача.

Задача 6. Като използвате формулата за тригонометрична интерполация при равноотдалечени възли, определете A_0, A_1, B_1 така, че $\tau(x) = \dfrac{A_0}{2} + A_1 \cos x + B_1 \sin x$ да удовлетворява условията

$$\tau(0) = 1,\ \tau\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2,\ \tau\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2.$$

Решение. За $n = 1$ заместваме в горните формули $x_0 = 0, x_1 = 2\pi/3, x_2 = 4\pi/3, y_0 = 1, y_1 = y_2 = 2$ и получаваме

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{2} y_i \cos(0x_i) = \frac{2}{3}(y_0 + y_1 + y_2) = \frac{2}{3}(1 + 2 + 2) = \frac{10}{3};\\
A_1 &= \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{2} y_i \cos x_i = \frac{2}{3}\left(1 \cos 0 + 2 \cos \frac{2\pi}{3} + 2 \cos \frac{4\pi}{3}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{2}{3};\\
B_1 &= \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{2} y_i \sin x_i = \frac{2}{3}\left(1 \sin 0 + 2 \sin \frac{2\pi}{3} + 2 \sin \frac{4\pi}{3}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(0 + 2\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Следователно търсеният тригонометричен полином е $\tau(x) = \dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3} \cos x$. □

Допълнителни задачи

Задача 7. Като използвате формулата за тригонометрична интерполация при равноотдалечени възли, определете коефициентите a_0, a_1, b_1 така, че $\tau(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ да удовлетворява условията:

(а) $\tau(0) = 1,\ \tau\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 4,\ \tau\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = 1$;

(б) $\tau(0) = -1,\ \tau\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 1,\ \tau\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = 3$;

(в) $\tau(0) = -3,\ \tau\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 1,\ \tau\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = -1$.

Отг. (а) $\tau_1(x) = 2 - \cos x + \sqrt{3} \sin x$; (б) $\tau_1(x) = 1 - 2\cos x - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \sin x$; (в) $\tau_1(x) = -1 - 2\cos x + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \sin x$.

Глава 7

Сплайн-функции. Интерполиране с кубични сплайни

7.1 Сплайн-функции

Вече показахме, че има и други класове от функции, освен алгебричните полиноми, които могат да се използват за описване на дадени процеси – тригонометрични, експоненциални полиноми и др. В това упражнение ще се спрем на още един клас функции (т.нар. сплайн-функции или сплайни), който играе основна роля при различни практически задачи на изчислителната математика – интерполиране, числено диференциране, интегриране и др. Сплайните играят ключова роля например в компютърната графика и в различни инженерни задачи.

Както знаем, интерполирането с алгебрични полиноми може да има някои сериозни недостатъци. Такива например са:

- Полиномите от висока степен имат свойството да осцилират. Обикновено грешката при тях в някои интервали може да бъде много голяма (особено в краищата на интервала на интерполация);
- Високите степени на полинома могат да доведат до по-големи грешки от закръгляване;
- Колкото по-висока степен има даден полином, толкова повече коефициенти в представянето му трябва да се определят;
- Теоремата за оценка на грешката в общия случай не дава „сходимост" на решението. Последното означава, че в общия случай дори и да избираме все по-голям брой интерполационни възли, полученият интерполационен полином може и да не клони към функцията f. Вече илюстрирахме известния феномен на Рунге. За произволна задача няма как да сме сигурни, че резултатът, който получаваме, ще бъде най-добър от гледна точка на достигане на минимална грешка;
- Всеки алгебричен полином е безкрайно диференцируем. Такава гладкост на решението обикновено не е необходима.

И така, за точността на интерполиране основно значение имат дължината на интервала на интерполация и степента на полинома. С други думи, бихме искали дължината на интервала да е достатъчно малка, а степента на полинома – достатъчно ниска. В такъв случай бихме могли да направим следното – да разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n}$, където $x_0 = a$ и $x_{n+1} = b$, и във всеки подинтервал да намерим полином $p_i(x)$ от някоя ниска степен, който да интерполира данните в този интервал (или функцията). С други думи, ще търсим решението на интерполационната задача като **по части полиномиална крива**. Обикновено тази полиномиална крива трябва да описва гладък процес, затова ще налагаме допълнителни условия за гладкост, т.е. всяка от кривите в подинтервалите да се свързва гладко с полиномиалните криви от съседните интервали. Разбира се, това става, като наложим условия за нейните производни.

Определение 8. Ще казваме, че $s(x)$ е сплайн-функция (или сплайн) от степен r с възли $t_1 < \cdots < t_n$ (англ. **knots**; за разлика от **nodes**, който се използва за възли при интерполация), ако удовлетворява следните условия:

1. $s(x)$ е полином от степен най-много r (т.е. е от π_r) във всеки подинтервал (t_i, t_{i+1}), $i = \overline{0, n}$, където $t_0 = -\infty, t_{n+1} = +\infty$;

2. $s(x), s'(x), \ldots, s^{(r-1)}(x)$ са непрекъснати функции в $(-\infty, +\infty)$, т.е. $s(x) \in C^{r-1}$. Нека означим с $p_i(x)$ алгебричният полином от π_r, с който съвпада сплайнът $s(x)$ в интервала $[t_i, t_{i+1}]$. Тогава за $i = \overline{1, n}$ имаме условията:

$$\begin{aligned} p_{i-1}(t_i) &= p_i(t_i), \\ p'_{i-1}(t_i) &= p'_i(t_i), \\ &\vdots \\ p^{(r-1)}_{i-1}(t_i) &= p^{(r-1)}_i(t_i). \end{aligned}$$

Множеството от сплайн-функции от степен r с възли $t_1 < \cdots < t_n$ ще бележим с $S_r(t_1, \ldots, t_n)$.

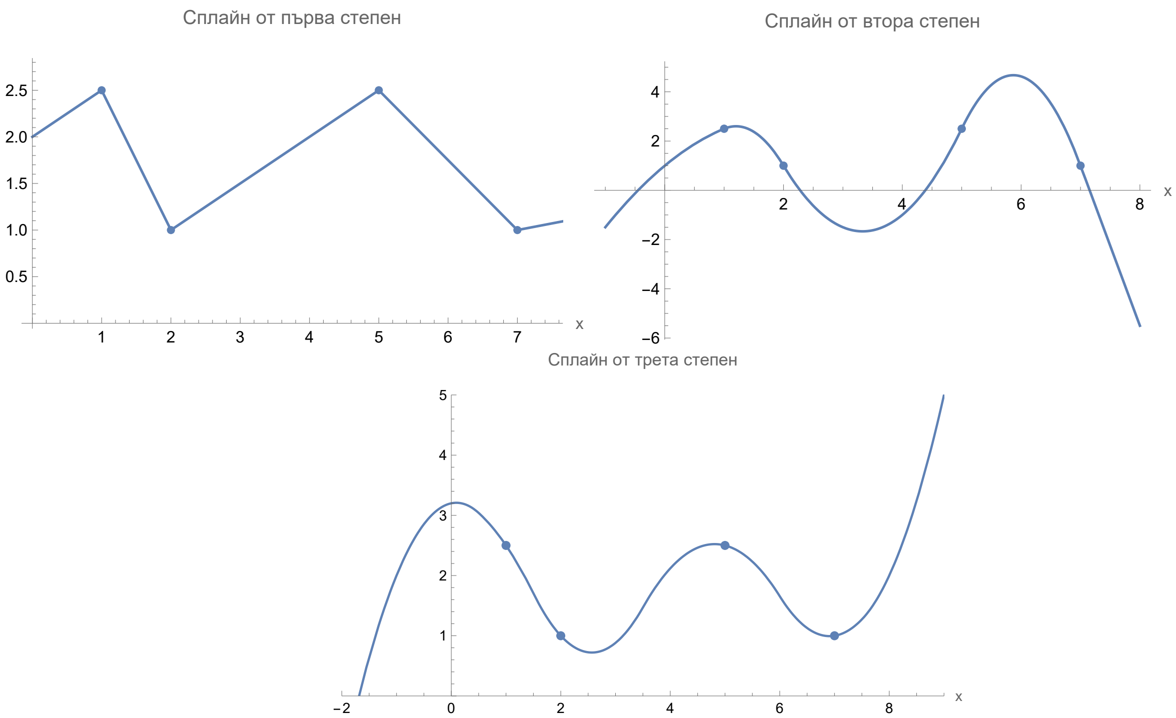
Нека сега обясним по-подробно горната дефиниция. Сплайн от степен r е по части полиномиална функция, която във всеки интервал съвпада с полином от степен, ненадминаваща r. Нещо повече, всеки сплайн трябва да удовлетворява условие за гладкост във всеки един от възлите си – полиномите от два съседни интервала трябва да се свързват гладко в съответния възел, т.е. да имат равни стойности в него, както и равни производни.

На Фиг. 7.1 са дадени сплайни от първа, втора и трета степен, построени за едни и същи възли. Да обърнем внимание на следното.

- Сплайните от първа степен (линейни сплайни) са непрекъснати функции, които са по части полиноми от първа степен. Недостатък на сплайните от първа степен е, че техните първи производни често са прекъснати във възлите на сплайна, т.е. те не са гладки функции.

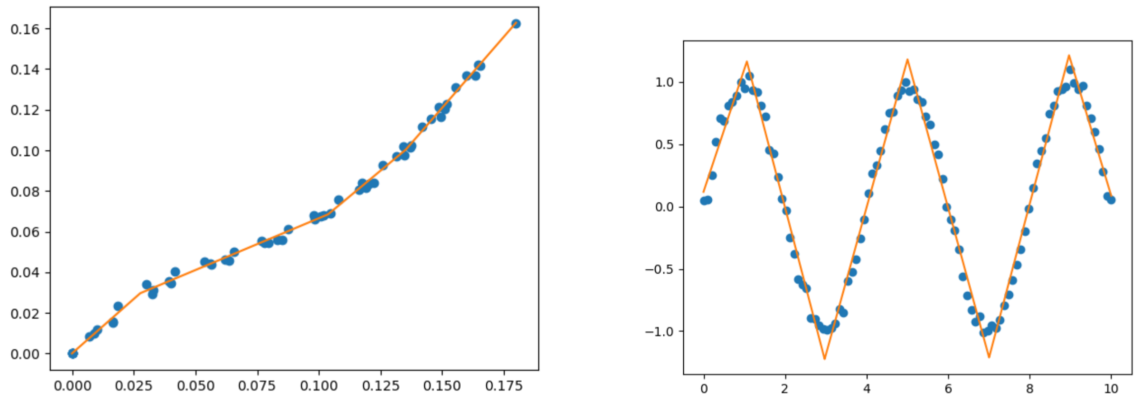
- Сплайните от втора степен (квадратични сплайни) са непрекъснати функции, които са по части полиноми от втора степен с непрекъснати първи производни.

- Сплайните от трета степен (кубични сплайни) са по части полиноми от трета степен с непрекъснати първи и втори производни. Кубичните сплайни са може би на практика най-използваните сплайни за интерполация, заради тяхната гладкост.

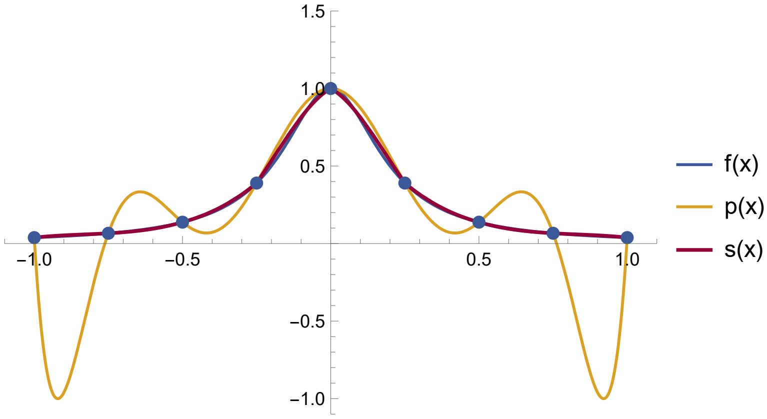


Фигура 7.1: Сплайн-функции от първа, втора и трета степен за едни и същи възли.

На Фиг. 7.2 са дадени примери за сплайни от първа степен (чиито графики са начупени непрекъснати линии), които приближават реални данни, а на Фиг. 7.3 сплайн от трета степен (който, предвид наложените условия за производната, изглежда като „гладка” крива), който интерполира функцията на Рунге, за която знаем, че при интерполация полиномите от по-висока степен осцилират и грешката от приближаване става голяма, обикновено в края на интервала.



Фигура 7.2: Сплайн-функции от първа степен.



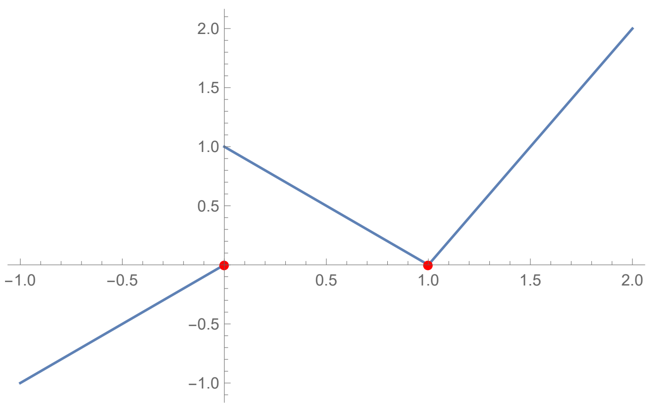
Фигура 7.3: Функцията на Рунге $f(x)$, интерполирана с полином от осма степен $p(x)$ и сплайн от трета степен/кубичен сплайн $s(x)$. Използвани са равноотдалечени възли в $[-1, 1]$ със стъпка 0.25.

От фигурите се вижда голямото предимство на сплайните – те са много гъвкави функции, които могат да описват много сложно поведение на дадени данни. От друга страна, във всеки подинтервал те са полиноми, което ги прави много лесни за работа.

Пример 6. Дадена е функцията $s(x)$ заедно с нейната графика. Определете дали функцията $s(x)$ е сплайн.

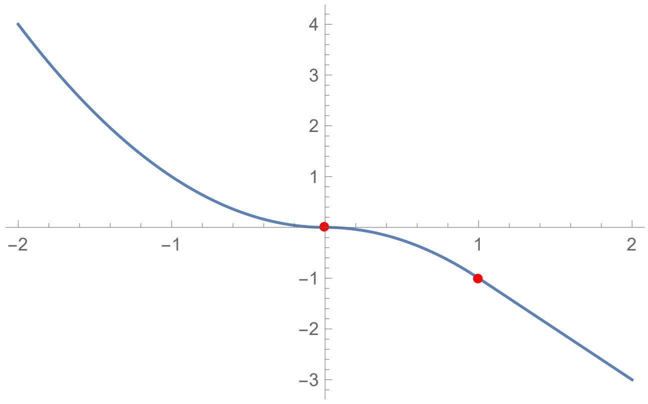
(а)

$$s(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0], \\ 1 - x, & x \in (0, 1), \\ 2x - 2, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$



(б)

$$s(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty, 0], \\ -x^2, & x \in (0, 1), \\ 1 - 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$



Нека разгледаме някои следствия от дефиницията на сплайн:

- производната на сплайн от степен r е сплайн от степен $r-1$;
- r-тата производна на сплайн $s(x) \in S_r(t_1,\dots,t_n)$ е по части константа с евентуални точки на прекъсване във възлите на сплайна;
- r-тата примитивна функция на една функция, която е по части константа, е сплайн от степен r.

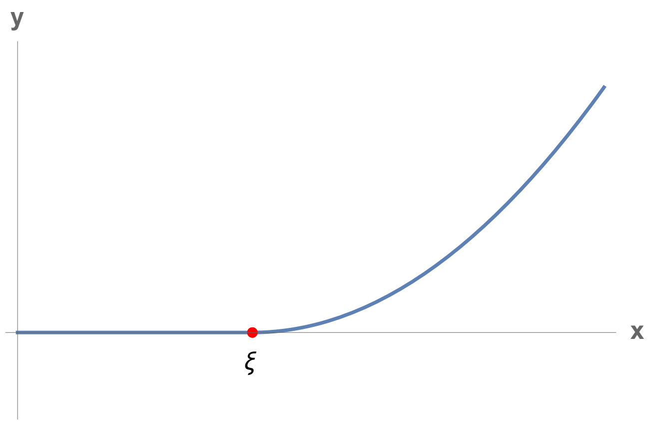
Разбира се, след като дадохме дефиниция на сплайн, естествено е да си зададем въпроса съществува ли базис, по който може да представим всеки сплайн от даден клас. Преди това да разгледаме един частен случай за сплайн от степен r с един възел, върху който ще построим базис за сплайн-функцията.

Определение 9. Функцията

$$(x-\xi)_+^r = \begin{cases} (x-\xi)^r, & x \geq \xi, \\ 0, & x < \xi, \end{cases}$$

ще наричаме **отсечена степенна функция**.

Последната очевидно изпълнява условията за сплайн от степен r с възел ξ – във всеки от двата интервала тя е от π_r и левите и десните ѝ производни до ред $r-1$ в точката ξ съвпадат (равни са на 0). Графиката на отсечената степенна функция е дадена на Фиг. 7.4.



Фигура 7.4: Графика на отсечената степенна функция $(x-\xi)_+^r$.

Оказва се, че отсечената степенна функция играе основна роля в теорията на сплайн-функциите. Следващата теорема показва, че всеки сплайн се представя като сума на алгебричен полином от π_r и линейна комбинация на подходящи отсечени степенни функции.

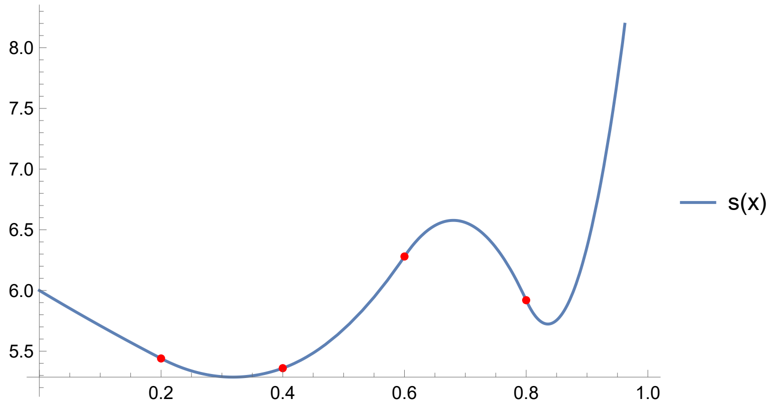
Теорема 13. Всяка сплайн-функция $s(x)$ от класа $S_r(t_1, \dots, t_n)$ се представя по единствен начин във вида

$$s(x) = p(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k (x - t_k)_+^r, \tag{7.1}$$

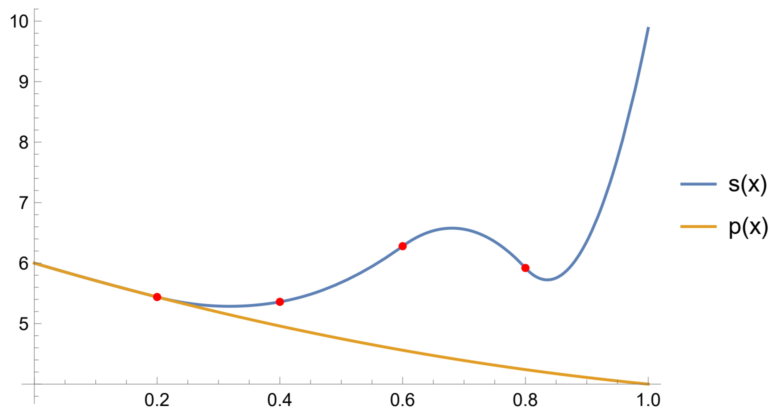
където $p(x) \in \pi_r$, а $c_1, \dots, c_n$ са реални числа. Нещо повече, коефициентите c_k се задават по формулата

$$c_k = \frac{s^{(r)}(t_k + 0) - s^{(r)}(t_k - 0)}{r!}, \ k = 1, \dots, n.$$

Нека сега обясним представянето на сплайна като линейна комбинация на отсечени степенни функции и полином от π_r. Ясно е, че за да определим сплайна, то трябва във всеки интервал да определим алгебричния полином, който съвпада с него. Нека разгледаме следната примерна фигура на сплайн $s(x)$ от втора степен (квадратичен сплайн) с 4 възела t_1, t_2, t_3, t_4 (на графиката $t_1 = 0.2, t_2 = 0.4, t_3 = 0.6, t_4 = 0.8$):



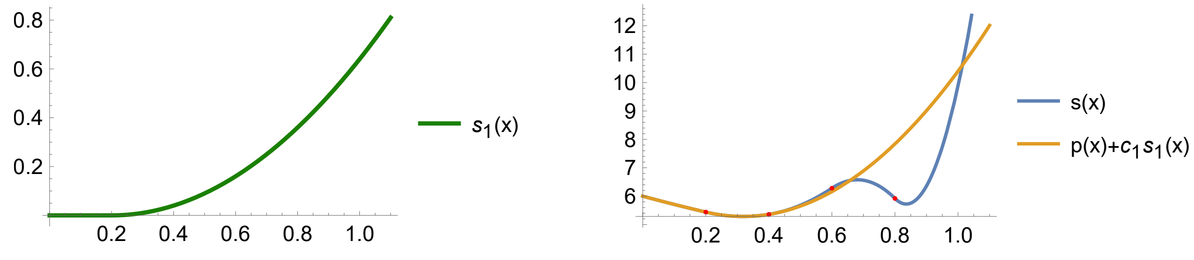
В първия интервал $s(x)$ съвпада с някакъв (очевидно единствен) полином $p(x) \in \pi_2$, както е показано на следната фигура:



Искаме към полинома да прибавим някаква функция $s_1(x)$ така, че във втория интервал (t_1 до t_2) графиката на получената функция $p(x) + s_1(x)$ също да съвпада с графиката на сплайна. Следователно трябва да прибавим функция $s_1(x)$, която:

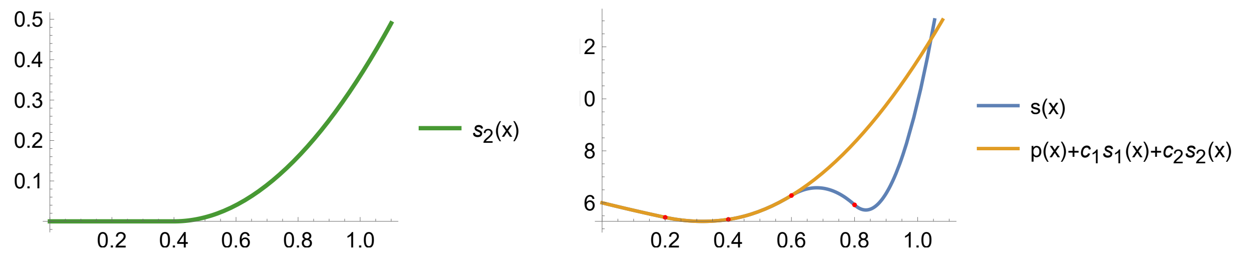
- не променя нищо в първия интервал;
- е полином от π_2 във втория;
- стойността ѝ в t_1 е 0;
- стойността на първата ѝ производна в t_1 също е 0 (това ще гарантира непрекъснатостта на производната).

Такова условие удовлетворява точно отсечената степенна функция $s_1(x) = (x - t_1)_+^2$, умножена по константа c_1 такава, че $p(x) + c_1 s_1(x)$ да минава през нужната стойност за възела t_2. Графиките на $s_1(x)$ и $p(x) + c_1 s_1(x)$ са показани по-долу.



Фигура 7.5: Графика на $s_1(x)$(вляво) и $p(x) + c_1 s_1(x)$ заедно с $s(x)$ (вдясно).

Ще постъпим аналогично и за третия интервал. Към функцията $p(x) + c_1 s_1(x)$ прибавяме константа по отсечената степенна функция $s_2(x) = (x - t_2)_+^2$. Така не променяме нищо в първите два интервала спрямо предходната фигура, а целим да получим „правилния” полином в третия интервал.



Фигура 7.6: Графика на $s_2(x)$(вляво) и $p(x) + c_1 s_1(x) + c_2 s_2(x)$ заедно с $s(x)$ (вдясно).

За да получим сплайна, продължаваме аналогично за всеки следващ интервал.

От последната теорема 13 следва, че всеки сплайн от степен r с възли $t_1, \dots, t_n$ има вида

$$s(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + \cdots + a_r x^r}_{p(x)} + c_1(x - t_1)_+^r + c_2(x - t_2)_+^r + \cdots + c_n(x - t_n)_+^r,$$

т.е. може да се разглежда като обобщен полином по базиса $1, x, \dots, x^r, (x - t_1)_+^r, \dots, (x - t_n)_+^r$. Следователно множеството $S_r(t_1, \dots, t_n)$ е **крайномерно линейно пространство с размер-**

ност $\boldsymbol{n+r+1}$. За да определим еднозначно сплайн от степен r с възли $t_1, \ldots, t_n$, представен във вида (7.1), трябва да определим коефициентите му, които са $n+r+1$ на брой.

7.2 Интерполиране с кубични сплайни

В това упражнение ще се спрем на въпроса за интерполиране с кубични сплайни, тъй като те са може би най-често използваните на практика сплайни за интерполация, заради тяхната гладкост. Да припомним, че за да бъде една по части полиномиална функция кубичен сплайн с възли $t_1, \ldots, t_n$, тя трябва да изпълнява следните условия:

- да бъде полином от степен, ненадминаваща три, във всеки подинтервал, определен от възлите на сплайна;
- $s(x), s'(x), s''(x)$ трябва да бъдат непрекъснати функции в интервала $(-\infty, +\infty)$.

Постановка на задачата. Нека $f(x)$ е дадена непрекъсната в интервала $[a, b]$ функция и $a = x_0 < \cdots < x_{n+1} = b$ са дадени интерполационни възли в този интервал. Да се намери сплайн $s(x) \in S_3(x_1, \ldots, x_n)$, който да интерполира f във всеки от възлите.

За възли на сплайна избираме тези интерполационни възли, които по естествен начин разделят интервала $[a, b]$, т.е. $x_1, \ldots, x_n$. Вече казахме, че за да построим $s(x)$, трябва да определим полиномите $p_i(x)$ във всеки подинтервал $(x_i, x_{i+1}), i = \overline{0, n}$. Да отбележим, че за определянето на всеки полином от вида $p_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$ трябва да определим четирите коефициента в представянето му, т.е. да наложим за него четири условия.
И така, от интерполационните условия веднага следва, че за сплайна е в сила

$$s(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n+1}.$$

От последното следва, че и всеки полином $p_i(x)$ трябва да изпълнява

$$p_i(x_i) = f(x_i),\ p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}),\ i = \overline{0, n}.$$

Последните условия са еквивалентни на условията за непрекъснатост във възлите на сплайна, т.е. $p_{i-1}(x_i) = p_i(x_i),\ i = \overline{1, n}$.

От интерполационните условия в задачата получихме, че за всяка функция $p_i(x)$ налагаме 2 (интерполационни) условия. От последното следва, че трябва да зададем още 2 условия, за да я определим еднозначно (тя има 4 неизвестни коефициента). Съществуват различни методи за интерполиране с по части кубични функции, като те се определят от това как сме избрали тези две условия.

- **Налагане условия за непрекъсната първа производна**

  Можем да поискаме полиномите $p_i(x)$ да удовлетворяват условията

  $$p_i'(x_i) = k_i, \quad p_i'(x_{i+1}) = k_{i+1}.$$

  Последните гарантират непрекъснатост на първата производна на $s(x)$. За различен избор на числата $\{k_i\}$ получаваме различни интерполиращи функции. Например, ако изберем $k_i = f'(x_i)$, т.е.

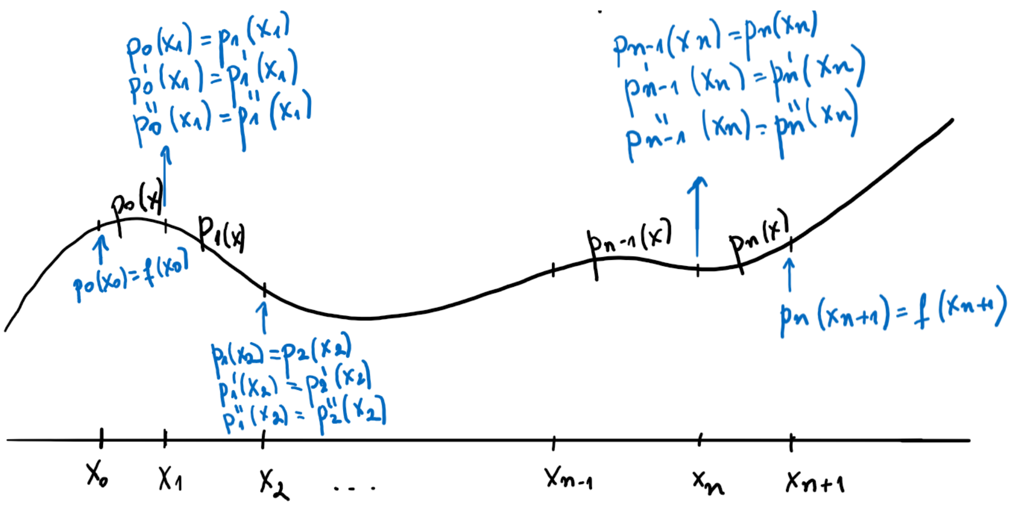
  $$p_i'(x_i) = f'(x_i), \quad p_i'(x_{i+1}) = f'(x_{i+1}),$$

  получаваме известната **по части Ермитова интерполация** – в този случай за полиномите $p_i(x)$ се налагат интерполационни условия за първата производна на функцията. Така получената функция се използва често на практика, но не е задължително кубичен сплайн, тъй като няма необходимата гладкост (има само непрекъсната първа производна, но не и втора).

- **Налагане условия за непрекъсната втора производна**

  Нека поискаме по части полиномиалната функция да бъде непрекъсната, с непрекъснати първи и втори производни, т.е. да бъде кубичен сплайн. Оказва се, че такъв винаги съществува, като се **определя еднозначно от „граничните" условия за производните** $s'(a)$, $s''(a)$, $s'(b)$, $s''(b)$ $(a := x_0,\ b := x_{n+1})$.

  За да разберем последното, да припомним, че искаме да определим полиномите $p_0(x)$, $p_1(x), \dots, p_n(x)$, като за всеки от тях трябва да зададем по 4 условия, т.е. общо $4(n+1)$. Да разгледаме следната скица с наложени следните условия за полиномите $p_i(x)$ – условия за интерполиране на f (или съответно условия за непрекъснатост), условия за непрекъснатост на първата и втората производна във възлите на сплайна:



На скицата съответства следната система уравнения:

	условие		общ брой условия
(1)	$p_i(x_i) = f(x_i)$	$i = 0, \dots, n$	$n+1$
(2)	$p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$	$i = 0, \dots, n$	$n+1$
(3)	$p'_{i-1}(x_i) = p'_i(x_i)$	$i = 1, \dots, n$	n
(4)	$p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i)$	$i = 1, \dots, n$	n

Последната система има $4(n+1)$ неизвестни и $4n+2$ условия. Наистина, за да има единствено решение, трябва да зададем още две условия – в граничните точки $a = x_0$ и $b = x_{n+1}$. Следните две допълнителни условия най-често се добавят към горната система:

(i) Ако $f'(a)$ и $f'(b)$ се знаят, то естествено е да се вземат условията:

$$s'(a) = p'_0(a) = f'(a), \quad s'(b) = p'_n(b) = f'(b).$$

С така зададени условия се получава така наречена **пълна сплайнова кубична интерполация**;

(ii) Добавят се условия

$$s''(a) = p''_0(a) = 0, \quad s''(b) = p''_n(b) = 0.$$

С тези условия получаваме така наречената **естествена кубична сплайнова интерполация**.

- При **по части Ермитова интерполация** се налагат условия за интерполиране на функцията f и на първите ѝ производни във всеки възел на интерполация;
- При **пълната кубична сплайнова интерполация** (англ. complete spline interpolation) се налагат условия за интерполиране на f във възлите на интерполация; за непрекъснатост на първата и втората производна във възлите на сплайна; за затваряне на задачата допълнително се налагат две условия за интерполиране на първите производни в краищата на интервала:

$$s'(a) = p_0'(a) = f'(a), \quad s'(b) = p_n'(b) = f'(b).$$

- За **естествена кубична интерполация** (англ. natural spline interpolation) се налагат условия за интерполиране на f във възлите на интерполация; за непрекъснатост на първата и втората производна във възлите на сплайна; за затваряне на задачата допълнително се налагат две условия за втората производна в краищата на интервала:

$$s''(a) = p_0''(a) = 0, \quad s''(b) = p_n''(b) = 0.$$

Нека сега разгледаме един конкретен пример за определяне на кубичен сплайн.

Задача 1. Да се намери сплайнът $s(x) \in S_3(0)$, интерполиращ $f(x) = x^4$ при пълна кубична сплайнова интерполация в точките $x_0 = -1,\ x_1 = 0, x_2 = 1$.

Решение. Търсим сплайн от степен $r = 3$ с възел $t_1 = 0$ във вида

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) \in \pi_3, x \le 0, \\ p_1(x) \in \pi_3, x \ge 0, \end{cases}$$

За да бъде кубичната сплайнова интерполация пълна, трябва да зададем:

- условия за интерполация във възлите $-1, 0, 1$;
- условия за непрекъснатост на първата и втората производна във възела на сплайна, т.е. в $x_0 = 0$;
- условия за интерполация на първите производни в двата края, т.е. в $x_0 = 0$ и $x_2 = 1$.

Имаме системата:

$p_0(x_0) = f(x_0),\ \ p_0'(x_0) = f'(x_0)$ (леви гранични условия),

$p_0(x_1) = p_1(x_1) = f(x_1),\ p_0'(x_1) = p_1'(x_1),\ p_0''(x_1) = p_1''(x_1)$ (усл. за непрекъснатост във възела $t_0 \equiv x_1$),

$p_1(x_2) = f(x_2),\ p_1'(x_2) = f'(x_2)$ (десни гранични условия).

Искаме да определим $p_0(x) = a_0 + b_0x + c_0x^2 + d_0x^3$ и $p_1(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3$. Можем да решим задачата по няколко начина. Първият начин е да си разпишем производните на полиномите и да определим коефициентите във всеки един от тях, като решим получената система. Ние ще разгледаме друг подход, който използва наученото от предишните упражнения.

Да заместим интерполационните условия от условието на задачата. Имаме:

$p_0(-1) = 1,\ p_0'(-1) = -4,$

$p_0(0) = p_1(0) = 0,$

$p_0'(0) = p_1'(0) = d$ (полагаме първата производна да е неизвестен параметър d),

$p_0''(0) = p_1''(0),$

$p_1(1) = 1,\ p_1'(1) = 4.$

Ще определим $p_0(x)$ и $p_1(x)$, като решим получените за тях две интерполационни задачи на Ермит – първата за $p_0(x)$ с интерполационни възли -1,0 с кратност 2; втората за $p_1(x)$ с интерполационни възли 0,1 с кратност 2. След като намерим решението за тях, неизвестния параметър d ще намерим от условието за непрекъсната втора производна във възела на сплайна, т.е. $p_0''(0) = p_1''(0)$. Имаме интерполационните таблици

$p_0(x)$:

-1	-1	0	0
1	-4	0	d

$p_1(x)$:

0	0	1	1
0	d	1	4

Ще използваме познатата ни схема за определяне на полиномите $p_0(x)$ и $p_1(x)$.

- Определяне на $p_0(x)$

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3
$x_0 = -1$	$f(x_0) = 1$			
		$f[x_0, x_1]^* = -4$		
$x_1 = -1$	$f(x_1) = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = 3$	
		$f[x_1, x_2] = -1$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = d - 2$
$x_2 = 0$	$f(x_2) = 0$		$f[x_1, x_2, x_3] = d + 1$	
		$f[x_2, x_3]^* = d$		
$x_3 = 0$	$f(x_3) = 0$			

От формулата на Нютон за интерполационния полином на Ермит получаваме

$$p_0(x) = 1 - 4(x+1) + 3(x+1)^2 + (d-2)x(x+1)^2 \Rightarrow p_0''(0) = 4d - 2.$$

- Определяне на $p_1(x)$

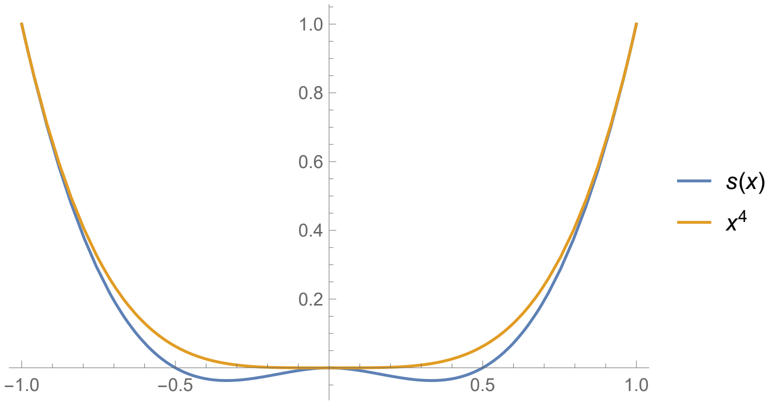
Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3
$x_0 = 0$	$f(x_0) = 0$			
		$f[x_0, x_1]^* = d$		
$x_1 = 0$	$f(x_1) = 0$		$f[x_0, x_1, x_2] = 1 - d$	
		$f[x_1, x_2] = 1$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 2 + d$
$x_2 = 1$	$f(x_2) = 1$		$f[x_1, x_2, x_3] = 3$	
		$f[x_2, x_3]^* = 4$		
$x_3 = 1$	$f(x_3) = 1$			

От формулата на Нютон за интерполационния полином на Ермит получаваме

$$p_1(x) = 0 + dx + (1-d)x^2 + (2+d)x^2(x-1) \Rightarrow p_1''(0) = -4d - 2.$$

От условието за непрекъснатостта в $t = 0$ имаме $4d - 2 = 4d - 2 \Rightarrow d = 0$. Следователно търсеният сплайн е

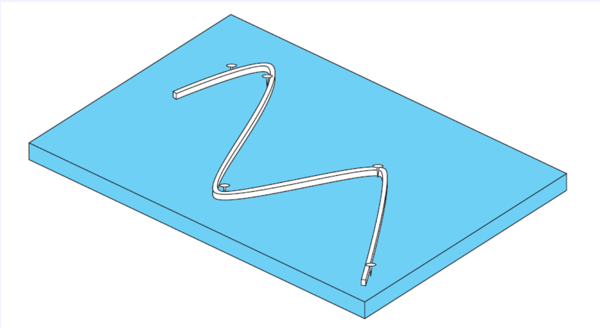
$$s(x) = \begin{cases} -2x^3 - x^2, x \leq 0, \\ 2x^3 - x^2, x \geq 0. \end{cases}$$



□

Интересно

Понятието сплайн идва от корабостроенето в стари времена, когато сплайн се е наричал специфичен инструмент за чертане. Там се използвал дълъг тънък и плосък инструмент (направен обикновено от дърво или метал), наречен сплайн, който се фиксирал в дадени точки чрез тегла и изглеждал точно като естествен кубичен сплайн. Последният се е използвал като инструмент за чертане на гладки криви, минаващи през дадени точки. При огъването му е известен физически факт, че добива такава форма, при която енергията от деформациите е минимална. Математически аналог на последното е теоремата на Холидей, доказана на лекции. Тази техника се използва и в наши дни при проектирането на кораби.



Допълнителни задачи

Задача 2. Да се намери сплайн $s(x)$, който интерполира точките $(1,2),(2,3),(4,1)$

(а) при пълна кубична интерполация с условия $s'(1)=1$ и $s'(4)=-1$.

(б) при естествена кубична интерполация.

Глава 8

B-сплайни

Нека е даден сплайн $s(t)$ от степен $r-1$ с възли $x_1 < \ldots < x_n$. В миналото упражнение показахме, че $s(t)$ може да се представи като линейна комбинация на функциите

$$1, t, \ldots, t^{r-1}, (t-x_1)_+^{r-1}, \ldots, (t-x_n)_+^{r-1}$$

или очевидно

$$1, t, \ldots, t^{r-1}, (x_1-t)_+^{r-1}, \ldots, (x_n-t)_+^{r-1}.$$

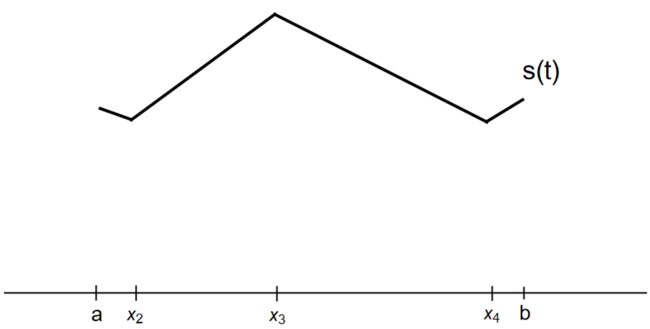
С други думи, ако искаме да определим сплайна в интервала (x_i, x_{i+1}) (т.е. полинома $p_i(t) \in \pi_{r-1}$, с който той съвпада в него), можем да го намерим като линейна комбинация на функциите

$$1, t, \ldots, t^{r-1}, (t-x_1)_+^{r-1}, \ldots, (t-x_i)_+^{r-1}.$$

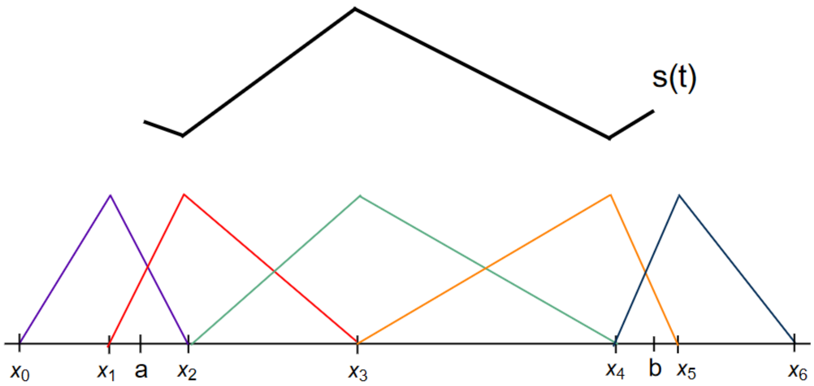
В такъв случай ще искаме да определим полином от степен $r-1$ като използваме $i+r$ израза. Това, разбира се, не е целесъобразно поради няколко причини. Първо, естествено е да искаме да намерим $p_i(t) \in \pi_{r-1}$ локално (т.е. ако го разглеждаме само върху съответния интервал) като линейна комбинация на r базисни функции, а не $i+r$. Второ, повече базисни функции в представянето му би могло да е причина за възникване на грешки от закръгляване.

Разбира се, ние знаем, че размерността на пространството на сплайн-функциите е по-голяма и следователно единственият начин да определим $p_i(t)$ локално чрез r базисни функции е останалите (тъй като в глобалния базис има толкова функции, колкото е размерността на пространството) да се нулират в този интервал.

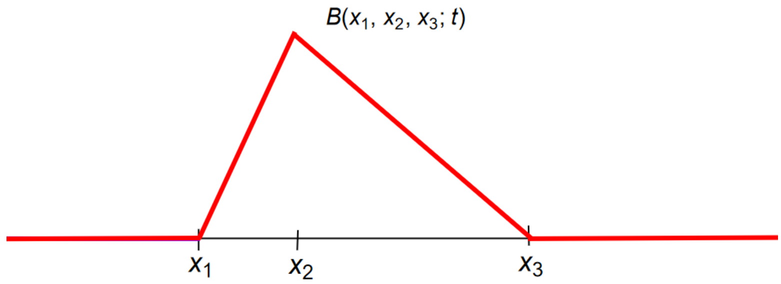
Оказва се, че може да се въведе такъв "хубав" базис, за който във всеки фиксиран интервал да се нулират всички базисни функции с изключение на r от тях. Нека е даден интервал $[a, b]$, в който искаме да определим линеен сплайн $s(t)$ с възли x_2, x_3, x_4:



Във всеки интервал $[a, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$, ще искаме да определим по два базисни линейни сплайна, ненулеви в съответния интервал, по които може да се представи полиномът, с който съвпада $s(t)$ в този интервал по следния начин:



Нека разгледаме една от тези базисни функции. Например базисната функция, която е ненулева в интервала (x_1, x_3), е илюстрирана по-долу.



Последната е сплайн от първа степен с възли x_1, x_2, x_3. Следователно може да се изрази като $p(t) + c_1\,(x_1 - t)_+ + c_2(x_2 - t)_+ + c_3(x_3 - t)_+$. Да припомним, че

$$(\xi - t)_+^r = \begin{cases} (\xi - t)^r, t \le \xi, \\ 0, \qquad\quad t > \xi. \end{cases}$$

Лесно се вижда, че $p(t) \equiv 0$. Базисният сплайн (или накратко B-сплайн) е линейна комбинация на стойностите на функцията $f(x) = (x - t)_+$ в точките x_1, x_2, x_3. Тази линейна комбинация трябва:

- да бъде непрекъсната;
- да бъде тъждествено 0 за $t \in (-\infty; x_1)$ и $t \in (x_3; \infty)$.

Ние вече знаем, че разделената разлика на дадена функция дава такава линейна комбинация. Нея ще използваме като дефиниция за търсените от нас базисни сплайни.

Определение 10. Разделената разлика на отсечената степенна функция $(x-t)_+^{r-1}$ по отношение на x в точките $x_0, \ldots, x_r$ се нарича B-сплайн (Basis spline) от степен $r - 1$ с възли $x_0, \ldots, x_r$. Последната ще означаваме с:

$$B(x_0, \ldots, x_r; t) = (x - t)_+^{r-1}[x_0, \ldots, x_r].$$

Да припомним, че изведохме аналитична формула за разделената разлика, която за функцията $f(x) = (x-t)_+^{r-1}$ изглежда така:

$$B(x_0,\dots,x_r;t) = (x-t)_+^{r-1}[x_0,\dots,x_r] = \sum_{k=0}^{r} \frac{(x_k-t)_+^{r-1}}{\omega'(x_k)}. \tag{8.1}$$

И така, всеки B-сплайн е линейна комбинация на отсечени степенни функции и следователно е сплайн. От горната дефиниция следва, че за да определим B-сплайн от първа степен ни трябват три възела; за B-сплайн от втора степен ни трябват четири възела и т.н. Броят на възлите на всеки базисен сплайн е с две повече от степента му. В сила е и следната теорема:

Теорема 14. За B-сплайна от степен $r-1$ с възли $x_0,\dots,x_r$ е в сила:

(а) $B(x_0,\dots,x_r;t) = 0$ за всяко $t \le x_0$ и всяко $t \ge x_r$;

(б) $B(x_0,\dots,x_r;t) > 0$ при $t \in (x_0,x_r)$,

за всяко $r \ge 1$.

Интервалът, в който една функция е различна от нула, се нарича **носител**. Следователно B-сплайнът $B(x_0,\dots,x_r;t)$ има краен носител (x_0,x_r).

Всеки сплайн от определена степен $r-1$ може да се представи в даден фиксиран интервал като линейна комбинация от базисни сплайни (B-сплайни) от същата степен. Предимството на този базис е, че всяка от функциите има минимален носител – тя е ненулева само в интервала определен от възлите ѝ. Следователно, за да пресметнем стойността на сплайна в дадена точка, трябва да вземем предвид само r на брой базисни сплайна, т.е. толкова колкото е размерността на пространството π_r (локално сплайните съвпадат с полиноми). Да обърнем внимание, че:

- броят на възлите на всеки базисен сплайн е с две повече от степента му:
- за всеки избор на възлите полученият B-сплайн е единствен.

Задача 1. Да се пресметне $B(0,1,3;t)$.

Решение. Имаме $B(0,1,3;t) = (x-t)_+^1[0,1,3]$. От дефиницията за сплайн и горната теорема следва, че търсим базисния сплайн във вида:

$$B(0,1,3;t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ p_1(t), & 0 \le t \le 1, \\ p_2(t), & 1 \le t \le 3, \\ 0, & t \ge 3. \end{cases}$$

Трябва да определим полинома за $t \in [0,1]$ и $[1,3]$. За целта ще използваме дефиницията за B-сплайн. Да припомним, че

$$(x-t)_+^r = \begin{cases} (x-t)^r, & x \ge t, \\ 0, & x \le t. \end{cases}$$

- $t \in [0,1]$

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$(0-t)_+ = 0$		
		$1-t$	
			$\dfrac{t}{3}$
$x_1 = 1$	$(1-t)_+ = 1-t$		
		1	
$x_2 = 3$	$(3-t)_+ = 3-t$		

- $t \in [1, 3]$

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$(0-t)_+ = 0$		
		0	
			$\dfrac{3-t}{6}$
$x_1 = 1$	$(1-t)_+ = 0$		
		$\dfrac{3-t}{2}$	
$x_2 = 3$	$(3-t)_+ = 3-t$		

Получихме

$$B(0,1,3;t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ t/3, & 0 \le t \le 1, \\ (3-t)/6, & 1 \le t \le 3, \\ 0, & t \ge 3. \end{cases}$$

□

Задача 2. Покажете, че $\displaystyle\int_{x_0}^{x_r} B(x_0,\dots,x_r;t)\,dt = \frac{1}{r}$.

Доказателство. За да докажем твърдението, ще използваме дефиницията за B-сплайн, свойството (8.1) и твърдението за носителя на отсечената степенна функция.

$$\int_{x_0}^{x_r} B(x_0,\dots,x_r;t)dt = \int_{x_0}^{x_r} (x-t)_+^{r-1}[x_0,\dots,x_r]\ dt \stackrel{(8.1)}{=} \int_{x_0}^{x_r} \sum_{k=0}^{r} \underbrace{\frac{1}{\omega'(x_k)}}_{:=c_k}(x_k-t)_+^{r-1}\ dt$$

$$= \int_{x_0}^{x_r} \sum_{k=0}^{r} c_k (x_k-t)_+^{r-1}\ dt = \sum_{k=0}^{r} c_k \int_{x_0}^{x_r} (x_k-t)_+^{r-1}\ dt = \sum_{k=0}^{r} c_k \left(\int_{x_0}^{x_k} (x_k-t)_+^{r-1}\ dt + \cancelto{0}{\int_{x_k}^{x_r} (x_k-t)_+^{r-1}\ dt} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{r} c_k \int_{x_0}^{x_k} (x_k-t)^{r-1}\ dt = -\sum_{k=0}^{r} c_k \frac{(x_k-t)^r}{r}\bigg|_{x_0}^{x_k} = \sum_{k=0}^{r} c_k \frac{(x_k-x_0)^r}{r} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r} c_k (x_k-x_0)^r$$

$$= \frac{1}{r}\underbrace{(x-x_0)^r[x_0,\dots,x_r]}_{=1} = \frac{1}{r}.$$

В последното използвахме, че разделената разлика от ред r е коефициента пред x^r в полинома $(x-x_0)^r$, т.е. е равна на 1. □

Обща задача за определяне на базис от B-сплайни и рекурентна връзка

Вече показахме как изглежда един B-сплайн. Нека сега разгледаме въпроса за намиране на базис от B-сплайни в дадено пространство от сплайни. Оттук нататък ще бележим $B_{i,r-1}(t) := B(x_i,\dots,x_{i+r};t), \forall i$. Първият индекс на B-сплайна съвпада с индекса на първия му възел, а вторият – със степента на сплайна. Да обърнем отново внимание, че броят на възлите е с два повече от степента му.

Задача 3. Да се докаже, че функциите $B_{i,1} = B(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; t)$, $i = 1, \ldots, n$, са базис в пространството $S_1(x_3, \ldots, x_n)$ в интервала $[a, b]$, където $x_1 < x_2 = a < x_3 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b < x_{n+2}$.

Решение. Искаме да покажем, че B-сплайните

$$B(x_1, x_2, x_3; t), B(x_2, x_3, x_4; t), \ldots, B(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}; t)$$

образуват базис в $[a, b]$, т.е. са линейно независими в интервала $[a, b]$. Да допуснем противното. Нека

$$f(t) = \alpha_1 B_{1,1}(t) + \alpha_2 B_{2,1}(t) + \cdots + \alpha_n B_{n,1}(t) = 0, \text{ за някое } \alpha_k \neq 0,\ \forall t \in [a, b].$$

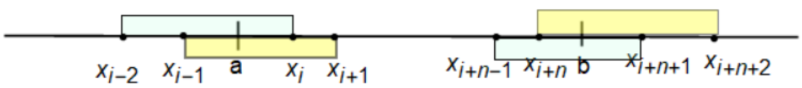
Тъй като $B_{k,1}(x_2) = 0$, $k = \overline{2, n}$, то следва, че $f(x_2) = f(a) = \alpha_1 \underbrace{B_{1,1}(a)}_{\neq 0} = 0$. Последното влече $\alpha_1 = 0$. Постъпваме аналогично и за възлите $x_3, \ldots, x_{n+1}$, откъдето $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ и достигаме до противоречие. Следователно $B_{i,1}(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$, $i = \overline{1, n}$, образуват базис на пространството $S_1(x_3, \ldots, x_n)$. $\square$

Последната задача е частен случай на общата теорема за произволно пространство от сплайн-функции, доказана на лекции.

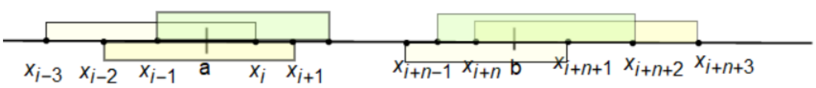
Теорема 15. Нека са дадени възли $x_1 < \cdots < x_r \leq a$, $a < x_{r+1} < \cdots < x_n < b$ и $b \leq x_{n+1} < \cdots < x_{n+r}$. Тогава B-сплайните $B(x_1, \ldots, x_{1+r}; t), \ldots, B(x_n, \ldots, x_{n+r}; t)$ образуват базис в пространството $S_{r-1}(x_{r+1}, \ldots, x_n)$.

За да разберем по-добре горната теорема, нека разгледаме следните фигури.

- Нека x_i е първият възел в интервала $[a, b]$. За сплайните от първа степен в интервала $[a, x_i]$ трябва да има два B-сплайна, които да са различни от 0, за да определят съответния полином от първа степен. Това са $B(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i; t)$ и $B(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; t)$, чиито носители са защриховани съответно със синьо и жълто на долната фигура. Затова вземаме два възела преди a. Аналогично трябва да вземем два възела след b.



- За квадратичните сплайни в интервала $[a, x_i]$ трябва да има три B-сплайна, които са различни от 0 в него и определят съответния полином от втора степен. Техните носители са защриховани на долната фигура. Следователно трябва да вземем три възела преди a и аналогично три след b.



Изобщо казано, за да определим сплайни от $(r-1)$-ва степен в интервала $[a, b]$, трябва да вземем редица от B-сплайни, отговаряща на възли, които започват r възела преди a и завършват r възела след b. Оказва се, че за B-сплайните съществува и удобна рекурентна връзка, с която да бъдат пресметнати.

Теорема 16. За всяко $r \geq 2$ и $t \in (-\infty, \infty)$ е в сила равенството

$$B_{i,r-1}(t) = \frac{t - x_i}{x_{i+r} - x_i} B_{i,r-2}(t) + \frac{x_{i+r} - t}{x_{i+r} - x_i} B_{i+1,r-2}(t),$$

където

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_{i+1} - x_i}, & t \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, & t \notin [x_i, x_{i+1}). \end{cases}$$

Забележка: Да обърнем внимание, че така дефинирано $B_{i,0}$ е по части константа.

Задача 4. Като използвате рекурентната връзка, изведете явния вид на $B(0, 1, 2, 3; t)$.

Решение. Ще използваме рекурентната връзка, за да получим B-сплайна от втора степен с възли $0, 1, 2$ и 3:

$$B(0, 1, 2, 3; t) = \frac{t - 0}{3 - 0} B(0, 1, 2; t) + \frac{3 - t}{3 - 0} B(1, 2, 3; t).$$

С помощта на рекурентната връзка сведохме задачата до задача за определяне на съответните B-сплайни от първа степен (т.е. с една степен по-малко). Аналогично:

$$\begin{aligned} B(0, 1, 2; t) &= \frac{t - 0}{2 - 0} B(0, 1; t) + \frac{2 - t}{2 - 0} B(1, 2; t); \\ B(1, 2, 3; t) &= \frac{t - 1}{3 - 1} B(1, 2; t) + \frac{3 - t}{3 - 1} B(2, 3; t). \end{aligned}$$

Тъй като $B(0, 1; t), B(1, 2; t), B(2, 3; t)$ имат различен носител, то ще разгледаме поотделно всеки един от интервалите, определен от възлите.

- $t \in [0, 1]$

$$B(0, 1; t) = \frac{1}{1 - 0} = 1,\ B(1, 2; t) = 0,\ B(2, 3; t) = 0.$$

- $t \in [1, 2]$

$$B(0, 1; t) = 0,\ B(1, 2; t) = \frac{1}{2 - 1} = 1,\ B(2, 3; t) = 0.$$

- $t \in [2, 3]$

$$B(0, 1; t) = 0,\ B(1, 2; t) = 0,\ B(2, 3; t) = \frac{1}{3 - 2} = 1.$$

Заместваме последните последователно в рекурентната връзка и получаваме:

$$B(0, 1, 2, 3; t) = \begin{cases} 0, \quad t \leq 0, \\ \dfrac{t}{3} \cdot \dfrac{t}{2} + \dfrac{3 - t}{3} \cdot 0 = \dfrac{t^2}{6}, \quad t \in [0, 1], \\ \dfrac{t}{3} \cdot \dfrac{2 - t}{2} + \dfrac{3 - t}{3} \cdot \dfrac{t - 1}{2} = \dfrac{-2t^2 + 6t - 3}{6}, \quad t \in [1, 2], \\ \dfrac{t}{3} \cdot 0 + \dfrac{3 - t}{3} \cdot \dfrac{3 - t}{3 - 1} = \dfrac{t^2 - 6t + 9}{6}, \quad t \in [2, 3], \\ 0, \quad t \geq 3. \end{cases}$$

$\square$

Допълнителни задачи

Задача 5. Да се намери явният вид на $B(0, 2, 3; t)$.

Задача 6. Да се намери явният вид на $B(-2, 0, 1; t)$.

Задача 7. Да се намери явният вид на $B(1, 4, 5; t)$ за $t \in [1, 5]$.

Глава 9

Приближение в линейни нормирани пространства. Равномерно приближение на непрекъснати функции с алгебрични полиноми

9.1 Приближение в линейни нормирани пространства

Досега разгледахме задачата за намиране на функция от някакво линейно крайномерно пространство, която интерполира друга функция в дадени точки. В следващите няколко упражнения ще разгледаме друг критерий за това колко „близки” са две функции една до друга.

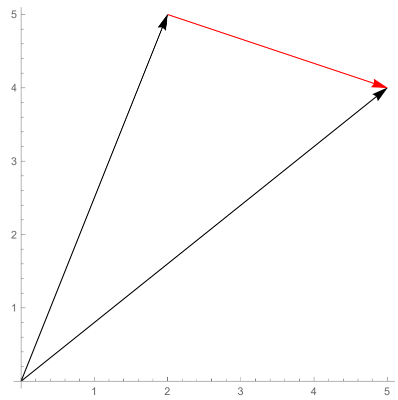
Нека разгледаме две точки в равнината. Разбира се, това колко близко са те една до друга се определя от разстоянието между тях. Ще обобщим понятието разстояние така, че то да бъде приложимо за произволни обекти (от дадено линейно пространство). За тази цел ще искаме да се запазят основните свойства на разстоянието между две точки.

Определение 11. Нека F е дадено линейно пространство. Казваме, че в F е въведено **разстояние**, ако на всеки два елемента $f, g \in F$ съпоставяме число $\rho(f, g)$, което удовлетворява следните изисквания:

1. $\rho(f, g) \geq 0$, като равенство се достига $\Leftrightarrow f \equiv g$;
2. $\rho(f, g) = \rho(g, f)$;
3. $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g),\ \forall f, g, h \in F$.

Линейно пространство, в което е въведено разстояние (метрика), ще наричаме **линейно метрично пространство**.

И така, за да намерим разстоянието между две точки в равнината например, трябва да намерим дължината (големината) на отсечката, която ги свързва. Както знаем, на всяка точка се съпоставя радиус-вектор. Тогава търсената дължина е равна на големината на разликата между двата вектора:



Следователно, ако можем да мерим големината на даден вектор, то можем да измерваме и разстоянието между две точки (или два вектора, два елемента и т.н.). Обобщението на големината на вектор в равнината е понятието **норма**.

Определение 12. Нека F е дадено линейно пространство. Казваме, че в F е въведена **норма**, ако на всеки елемент f от F е съпоставено число $\|f\|$ (норма на f) и са в сила условията:

1. $\|f\| \geq 0$, като $\|f\| = 0$ тогава и само тогава, когато $f \equiv 0$;
2. $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \ \forall f, g \in F$.

С други думи, така дефинирана, нормата може да се използва, за да се дефинира разстояние между два елемента на пространството F по следния начин:

$$\rho(f, g) = \|f - g\|, \ \forall f, g \in F.$$

Иначе казано, така мерим колко голяма е грешката (разликата) между тях.

Могат да се въведат различни критерии (норми), които да удовлетворяват така дефинираните абстрактно понятия. Да дадем два примера за може би най-често използваните норми във функционални пространства и породените от тях разстояния:

- **равномерна норма**
$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$
Тя поражда **равномерно разстояние**
$$\rho(f, g) = \|f - g\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

- **средноквадратична норма с тегло $\mu(\mathbf{x})$**
$$\|f\|_{L_2[a,b]} = \sqrt{\int_a^b \mu(x) f^2(x) \, dx}.$$
Тя поражда **средноквадратично разстояние**
$$\rho(f, g) = \|f - g\|_{L_2[a,b]} = \sqrt{\int_a^b \mu(x)(f(x) - g(x))^2 \, dx}.$$

И така, да припомним, че общата задача, която решаваме, е следната. Дадена е функция f от линейното пространство F. Търсим нейно приближение (нека го наречем p^*) от някое крайномерно подпространство Ω_n на F, като p^* е възможно най-близко (в някакъв смисъл) до f.

След като имаме въведена норма (и съответно критерий за това колко близо са два обекта), то вече възниква естествено въпросът за най-доброто приближение на дадена функция f с елемент от крайномерното подпространство по отношение на въведената норма и породеното от нея разстояние. По-точно казано, **елемент на най-добро приближение** от $\Omega_n \subset F$ е елементът $p^* \in \Omega_n$, за който

$$\|f - p^*\| = \inf_{p\in\Omega_n} \rho(f,p) = \inf_{p\in\Omega_n} \|f - p\|.$$

Разстоянието между f и p^* се нарича **най-добро приближение** на f с елементи от Ω_n. Ще го бележим с $\mathbf{E_n(f)}$. Да припомним, че всяка функция от крайномерното линейно пространство Ω_n се задава като линейна комбинация на n независими функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ (които образуват базис в Ω_n), т.е.

$$\Omega_n := \{\varphi : \varphi = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x), (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \varphi_i(x) \in F\}$$

Интересен е въпросът за съществуване и единственост на елемента на най-добро приближение в различни пространства с въведена норма. Оказва се, че за всяко линейно нормирано пространство съществува такъв елемент.

Теорема 17. Нека F е **линейно нормирано пространство**. Нека $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$ са линейно независими елементи на F и Ω_n е линейното пространство, породено от тях. Тогава $\forall f \in F$ **съществува** елемент на най-добро приближение от Ω_n по отношение на разстоянието, породено от нормата на F.

Въпросът за единствеността му обаче е малко по-сложен. Може да се покаже, че е в сила следната теорема.

Теорема 18. Ако F е **строго нормирано пространство**, то $\forall f \in F$ съществува **единствен** елемент на най-добро приближение от Ω_n.

Определение 13. Ще казваме, че нормираното пространство F е строго нормирано, ако от равенството $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$ следва, че елементите f и g от F са линейно зависими.

- *Строго нормирано пространство е $\mathbb{R}^n$. Например в него можем да въведем Евклидова норма, т.е.*

  $$\|\vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2},$$

  където $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T$.

- *Пример за строго нормирано линейно функционално пространство е линейно пространство с въведено скаларно произведение (Хилбертово пространство). За тях ще говорим малко по-късно в курса.*

Нека обаче подчертаем, че теоремата ни дава **достатъчно условие**, т.е. пространството може да не е строго нормирано и въпреки това елементът на най-добро приближение да е единствен.

9.2 Равномерно приближение на непрекъснати функции с алгебрични полиноми

Нека разгледаме пространството от непрекъснати функции $C[a,b]$. Ясно е, че последното е линейно. Нормираме го, като въвеждаме в него равномерна норма:

$$\|f\|_{C[a,b]} := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Последната поражда разстояние

$$\rho(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Преди да разгледаме задачата за намиране на равномерно приближение на $f \in C[a,b]$ с елемент от някое крайномерно подпространство на $C[a,b]$, да разгледаме един нагледен пример за равномерната норма.

Задача 1. Да се намерят равномерните норми в интервала $[0,1]$ на функциите $f(x) = x$ и $g(x) = x^2$ и равномерното разстояние между тях в същия интервал.

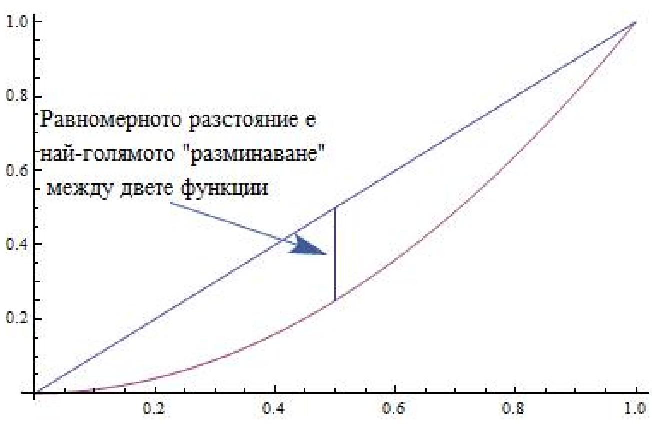
Решение. Прилагаме дефиницията

$$\|f\|_{C[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} |x| = 1$$
$$\|g\|_{C[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} |x^2| = 1$$

Равномерното разстояние между двете функции е

$$\|f - g\|_{C[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} |x - x^2| = \frac{1}{4}.$$

Да отбележим, че последният екстремум се достига при $x = \dfrac{1}{2}$ (върха на параболата). Геометричният смисъл на равномерното разстояние между $f(x)$ и $g(x)$ е илюстриран на следващата фигура. Това е най-голямата (по абсолютна стойност) разлика между стойностите на двете функции в интервала.



$\square$

Да разгледаме задачата за намиране на **най-добро равномерно приближение** (НДРП) на $f \in C[a,b]$ в пространството от алгебрични полиноми π_n (очевидно $\pi_n \subset C[a,b]$). Ако инфимумът се достига за някакъв полином p^* от π_n, т.е. $E_n(f) = \|f - p^*\|$, то p^* ще наричаме **полином на най-добро равномерно приближение** (ПНДРП), а числото $E_n(f)$ **най-добро равномерно приближение**.

Полиномът p^*, разбира се, съществува, тъй като пространството е нормирано. Може да се покаже, че пространството $C[a,b]$ не е строго нормирано и единствеността на елемента не следва от общата формулировка за нормирани пространства. Единствеността на полинома следва от така наречената теорема на Чебишов за алтернанса.

Теорема 19 (Теорема на Чебишов за алтернанса)**.** Нека f е произволна непрекъсната функция в крайния и затворен интервал $[a,b]$. Необходимо и достатъчно условие полиномът P от π_n да бъде полином на най-добро равномерно приближение за f от n-та степен в $[a,b]$ е да съществуват $n+2$ точки $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ от $[a,b]$ такива, че $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \le b$ и

$$f(x_i) - P(x_i) = (-1)^i \epsilon \|f - P\|,\ i = 0, \dots, n+1,$$

където $\epsilon = 1$ или $\epsilon = -1$.

Точките $x_0 < \dots < x_{n+1}$, които удовлетворяват условието на теоремата, ще наричаме **точки на алтернанс**. В горната теорема $\|f - P\| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)|$, откъдето следва, че в точките на алтернанс се допуска най-голямата по модул грешка в целия интервал $[a,b]$. Да обърнем внимание, че точките на алтернанс за полином от π_n са **поне** $n+2$, т.е. могат да бъдат и повече.

Следствие 1. За всяка непрекъсната в $[a,b]$ функция f съществува единствен полином на най-добро равномерно приближение от степен n.

Нека сега разгледаме няколко задачи за намиране на полином на най-добро равномерно приближение, като използваме, че той изпълнява условието от теоремата на Чебишов за алтернанса.

Задача 2. Намерете полинома на най-добро равномерно приближение от първа степен и най-доброто приближение $E_1(f)$ за функцията $f(x) = \sqrt{x}$ в интервала $[0,1]$.

Решение. Нека означим полинома на най-добро равномерно приближение с $p(x) = cx + d$ и $\|f(x) - p(x)\| = \max\limits_{x \in [0,1]} |f - p| =: L$. От теоремата на Чебишов за алтернанса следва, че съществуват поне три точки на алтернанс $x_0 < x_1 < x_2$ в $[0,1]$. Тогава е изпълнено:

$$\begin{aligned} f(x_0) - (cx_0 + d) &= \epsilon L, \\ f(x_1) - (cx_1 + d) &= -\epsilon L, \\ f(x_2) - (cx_2 + d) &= \epsilon L, \end{aligned}$$

където $\epsilon \in \{-1, 1\}$, или записана еквивалентно

$$f(x_0) - (cx_0 + d) = -(f(x_1) - (cx_1 + d)) = f(x_2) - (cx_2 + d). \tag{9.1}$$

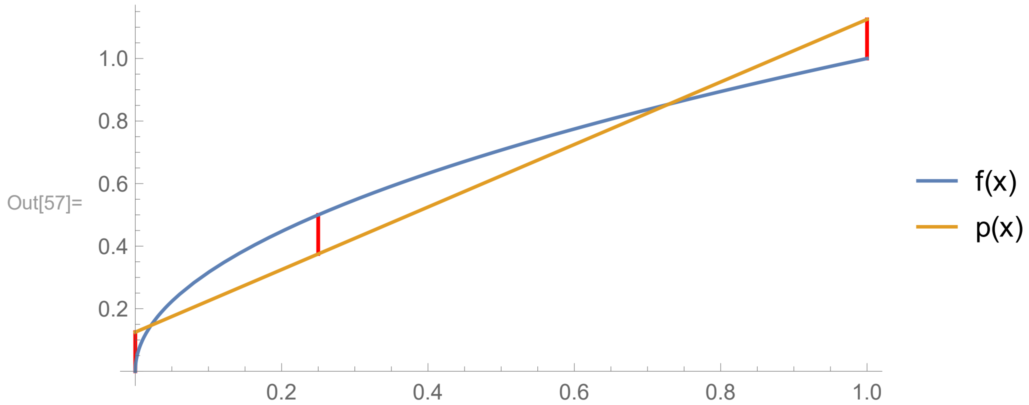
Последното ни дава две уравнения, с които ще намерим коефициентите на полинома. Нека сега помислим как да определим кои са точките на алтернанс. Както казахме, в точките на алтернанс се допуска най-голямата по модул грешка между функцията и полинома. Това означава, че последните са точки на екстремум за функцията на грешката $f(x) - p(x)$ в интервала $[0,1]$. Тъй като

$$(f - p)' = (\sqrt{x} - (cx + d))' = \frac{1 - 2c\sqrt{x}}{2\sqrt{x}},$$

то $(f-p)' = 0$ има решение $x = 1/(4c^2)$. Казахме, че този точки са три, което означава, че другите две точки на алтернанс съвпадат с края на интервала, т.е. имаме $x_0 = 0, x_1 = 1/(4c^2), x_2 = 1$. И така, за да определим коефициентите, заместваме условията в (9.1) и решаваме еквивалентната система

$$\begin{aligned} f(x_0) - (cx_0 + d) &= -(f(x_1) - (cx_1 + d)), \\ f(x_0) - (cx_0 + d) &= f(x_2) - (cx_2 + d) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -d &= -1/(2c) + 1/(4c) + d, \\ -d &= 1 - c - d. \end{aligned}$$

Решението е $c = 1, d = 1/8$, т.е. $p(x) = x + 1/8$. Точките на алтернанс са илюстрирани на следващата фигура.



Да обърнем внимание, че най-доброто равномерно приближение, т.е. максималното разстояние между f и p^*, е $E_1(f) = 1/8$. □

Задача 3. Да се намери ПНДРП от π_1 и най-доброто приближение $E_1(f)$ за функцията $f(x) = 1/(1+x)$ в интервала $[0,1]$.

Решение. Да означим ПНДРП с $p(x) = ax + b$, $\max\limits_{x\in[0,1]} |f - p| =: L$. Ще постъпим аналогично на горната задача. Точките на алтернанс трябва да са точки на екстремум в интервала $[0,1]$ за функцията на грешката $1/(1+x) - (ax+b)$. Да разгледаме първата ѝ производна:

$$\left(\frac{1}{1+x} - (ax+b)\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} - a = \frac{-1 - a(1+x)^2}{(1+x)^2}.$$

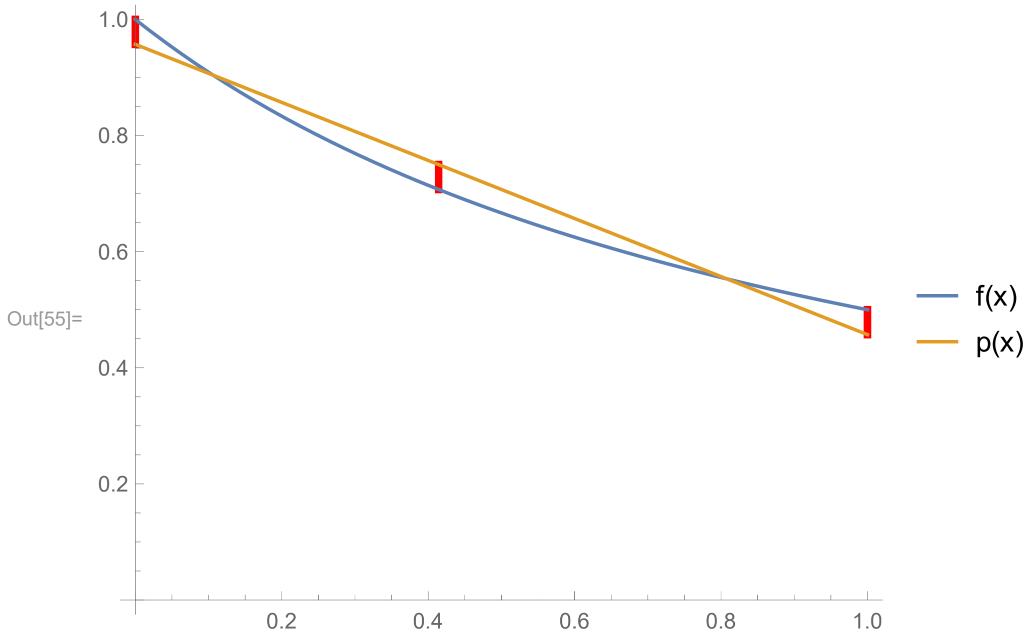
Последната се нулира за $x = -1 \pm \sqrt{\dfrac{1}{-a}}$ в случая, когато $a < 0$. Това означава, че в $[0,1]$ можем да имаме само една положителна точка на екстремум. С други думи, точките на алтернанс са $x_0 = 0, x_1 = -1 + \sqrt{\dfrac{1}{-a}}, x_2 = 1$. Отново заместваме всички получени условия за функцията на грешката и точките на алтернанс в една система:

$$\begin{aligned} f(0) - (0a + b) &= \epsilon L, \\ f(x_1) - (ax_1 + b) &= -\epsilon L, \\ f(1) - (a + b) &= \epsilon L \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} &1 - b = \epsilon L, \\ &\frac{1}{1+x_1} - (ax_1 + b) = -\epsilon L, \\ &\frac{1}{2} - (a+b) = \epsilon L. \end{aligned}$$

Така получените уравнения влекат

$$1 - b = -\left(\frac{1}{1+x_1} - (ax_1 + b)\right) = \frac{1}{2} - (a+b).$$

Като приравним първото и третото получаваме $a = -1/2$. Следователно $x_1 = -1 + \sqrt{2}$. Остава да определим $b = \dfrac{2\sqrt{2}+1}{4}$. Следователно полученият полином на най-добро равномерно приближение е $p(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{2\sqrt{2}+1}{4}$. Най-доброто приближение е стойността на максималната по модул грешка, която може да се намери в коя да е точка на алтернанс. Следователно най-доброто равномерно приближение е равно на $E_1(f) = \left|1 - \dfrac{2\sqrt{2}+1}{4}\right| = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{4}$.



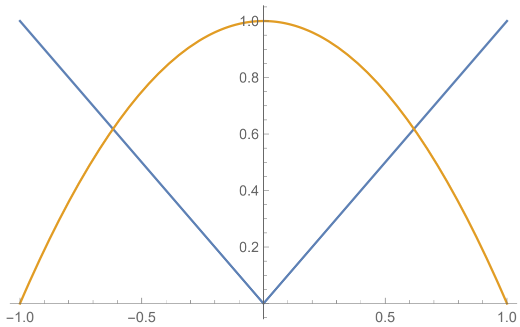
□

Задача 4. Да се намери ПНДРП от π_1 и най-доброто приближение $E_1(f)$ за функцията $f(x) = \left|x - \dfrac{1}{2}\right|$ в интервала $[-1, 1]$.

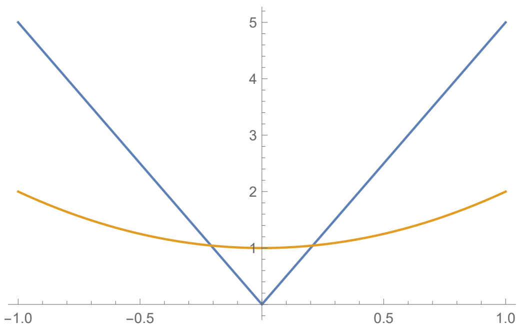
Упътване: Една от точките на алтернанс е точката, в която функцията на грешката има екстремум, т.е. това е точка, в която производната се нулира или не съществува. В случая имаме $x = \dfrac{1}{2}$, тъй като там функцията $f(x) = \left|x - \dfrac{1}{2}\right|$ не е диференцируема.

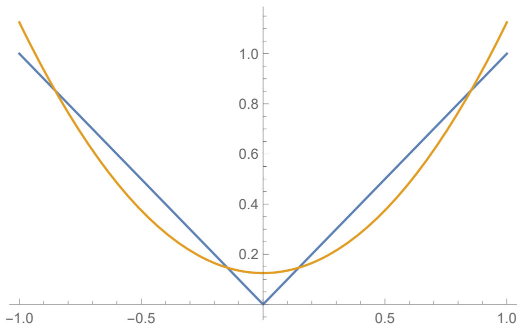
Задача 5 (Не е правена на упражнения)**.** Да се намери ПНДРП за функцията $f(x) = |x|$ от π_2 в интервала $[-1, 1]$.

Решение. Търсим полинома $p(x) = ax^2 + bx + c$. Трябва да намерим поне 4 точки на алтернанс. По подобен начин на предходните задачи можем да се убедим, че -1 и 1 трябва да са точки на алтернанс. Бихме могли да подходим аналогично на предходните задачи за определяне на останалите, но изчисленията ще станат много времеемки. Нека се опитаме да използваме добитата вече интуиция, за да съобразим как изглеждат те. Има няколко възможности за положението на параболата спрямо графиката на модулната функция. Очевидно, ако параболата е отворена отдолу, няма как да има повече от три точки на алтернанс.



Нека параболата е отворена отгоре. Да разгледаме следните възможни взаимни положения на двете графики.





Ясно е, че в първия случай не може да има повече от три точки на алтернанс. Интересният случай обаче е вторият. Той удовлетворява условията на теоремата, тъй като ще има 5 точки на алтернанс (трябват **поне** 4).

От последната картинка е ясно, че точките на алтернанс са -1, α, 0, β, 1. Уравнението $p'(x) - f'(x) = 0$ е еквивалентно или на $2ax + b + 1 = 0$ (при $x < 0$), или на $2ax + b - 1 = 0$ (при $x > 0$). Така получаваме $\alpha = \dfrac{-1-b}{2a}$ и $\beta = \dfrac{1-b}{2a}$. И така, трябва да е в сила

$$p(-1) - f(-1) = -(p(\alpha) - f(\alpha)) = p(0) - f(0) = -(p(\beta) - f(\beta)) = p(1) - f(1).$$

Лесно се вижда от условието $p(-1) - f(-1) = p(1) - f(1) \equiv a - b + c - 1 = a + b + c - 1$, следва че $b = 0$. Оттук имаме $\alpha = -\dfrac{1}{2a}$ и $\beta = \dfrac{1}{2a}$ и следователно:

$$p(-1) - f(-1) = a + c - 1$$

$$p\left(-\frac{1}{2a}\right) - f\left(-\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{4a} + c - \frac{1}{2a} = c - \frac{1}{4a}$$

$$p(0) - f(0) = c$$

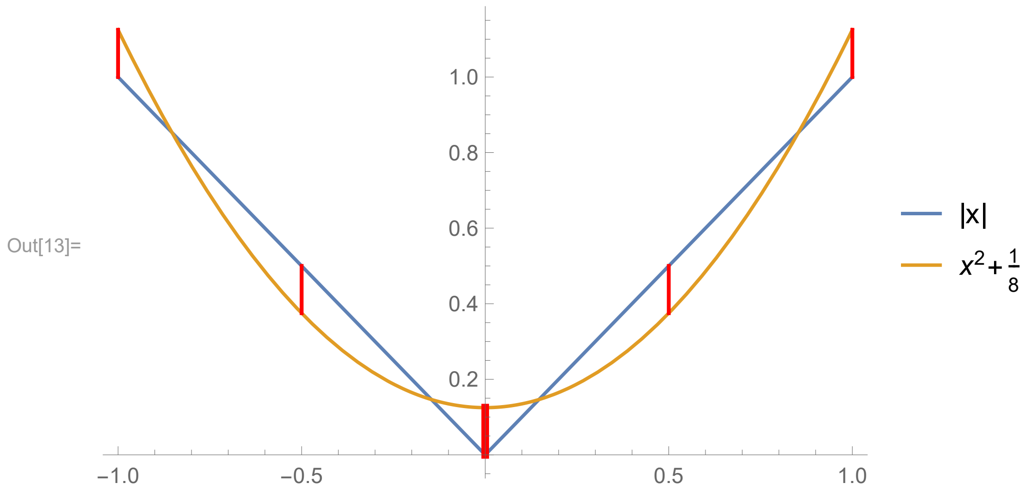
$$p\left(\frac{1}{2a}\right) - f\left(\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{4a} + c - \frac{1}{2a} = c - \frac{1}{4a}$$

$$p(1) - f(1) = a + c - 1.$$

Следователно търсим решение на

$$a + c - 1 = -\left(c - \frac{1}{4a}\right) = c.$$

Като приравним първия и последния израз, получаваме $a = 1$. След това, като приравним първия и втория, получаваме $c = 1/8$. Търсеният полином е $p(x) = x^2 + \frac{1}{8}$.



Колко е най-доброто равномерно приближение в този случай? $\square$

Задача 6. Да се докаже, че най-доброто равномерно приближение с полинома от π_n за функцията $f(x) = \cos x$ в $[-1, 1]$ удовлетворява неравенството $E_n(f) \leq \dfrac{1}{2^n(n+1)!}$.

Доказателство. Нека означим с p^* полинома на най-добро равномерно приближение от π_n. Да припомним, че $E_n(f) = \inf\limits_{p \in \pi_n} \|f - p\| = \|f - p^*\|$. Последното означава, че $E_n(f) \leq \|f - p\|, \forall p \in \pi_n$. Следователно можем да оценим отгоре най-доброто приближение с някое друго "добро" приближение, което вече знаем и да приложим оценката за $E_n(f)$.

Ние знаем как да оценяваме грешката при интерполация, като знаем, че най-добрата оценка на грешката се получава, ако изберем за интерполационни възли нулите на съответния полином на Чебишов. Нека разгледаме интерполационния полином на Лагранж $L_n(f; x) \in \pi_n$, който интерполира f в нулите $\xi_0, \ldots, \xi_n$ на полинома на Чебишов от първи род от $(n+1)$-ва степен

$$T_{n+1}(x) = \cos\left((n+1) \arccos x\right), \ x \in [-1, 1].$$

От теоремата за оценка на грешката знаем, че е в сила:

$$\|f(x) - L_n(f;x)\| = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_n(f;x)| = \max_{x\in[-1,1]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\xi_0)\dots(x-\xi_n) \right|$$

$$\leq \frac{\overbrace{\max_{\xi\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(\xi)|}^{=1}}{(n+1)!} \underbrace{\max_{x\in[-1,1]} |(x-\xi_0)\dots(x-\xi_n)|}_{=\frac{1}{2^n}}$$

$$\leq \frac{1}{2^n(n+1)!}.$$

От последното следва, че е в сила

$$E_n(f) \leq \|f - L_n(f;x)\| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!}.$$

$\square$

Допълнителни задачи

Задача 7. Да се намери полиномът на най-добро равномерно приближение (ПНДРП) от π_1 и най-доброто приближение $E_1(f)$ за функцията

(а) $f(x) = |x|$ в $[-1,5]$;

(б) $f(x) = x^3$ в $[-1,0]$;

(в) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ако } -1 \leq x < 0, \\ 2-x, & \text{ако } 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$

(г) $f(x) = \sin x, x \in [-\pi,\pi]$.

Глава 10

Полиноми на Бернщайн

Вече показахме, че ПНДРП от π_n за дадена непрекъсната функция f се характеризира с $n+2$ точки на алтернанс. Друг важен резултат за намиране на равномерни приближения е теоремата на Вайерщрас, която гласи, че за всяка непрекъсната функция f в интервала $[a,b]$ съществува полином на равномерно приближение $p(x)$, който приближава f с желана от нас точност ϵ.

Теорема 20 (Теорема на Вайерщрас)**.** Нека $[a,b]$ е краен затворен интервал и $f(x)$ е непрекъсната функция в този интервал. Тогава за всяко $\epsilon > 0$ съществува алгебричен полином $p(x)$ такъв, че

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

Вайерщрас доказва съществуването на $p(x)$, но явния вид на полинома намира Бернщайн малко по-късно, като въвежда т.нар. полином на Бернщайн.

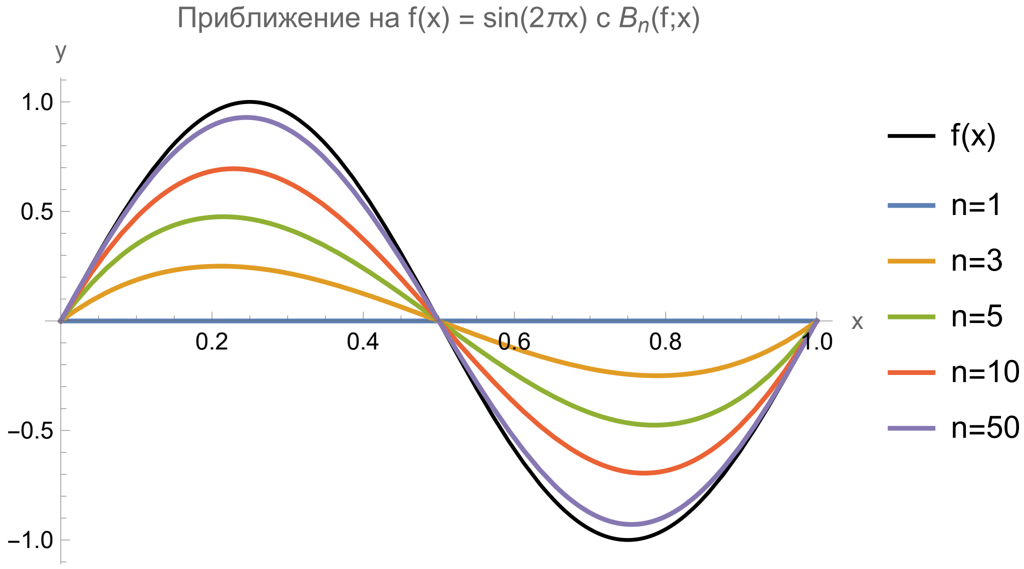
Определение 14. Нека $f(t)$ е произволна функция, определена в интервала $[0,1]$. **Полином на Бернщайн** от степен n за функцията f дефинираме с равенството

$$B_n(f;t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k},\ t \in [0,1].$$

Полиномът на Бернщайн представлява апроксимация (приближение) на функцията $f(t)$, дефинирана в $[0,1]$. Той е линейна комбинация на базисните функции $\{\varphi_{nk}(t)\}_{k=0}^{n}$,

$$\varphi_{nk}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k},$$

с коефициенти – стойностите на f в равноотдалечени точки $\left\{\frac{k}{n}\right\}$, $k = 0, ..., n$. Може да се покаже, че редицата от полиноми $\{B_n(f;t)\}$ клони към функцията f при $n \to \infty$, т.е. при увеличаване на n получените полиноми $\{B_n(f;t)\}$ приближават все по-добре функцията f, вж. Фиг. 10.1. Полиномът на Бернщайн може да се обобщи за непрекъсната функция в произволен интервал $[a,b]$ като се направи смяна на променливата.



Фигура 10.1: Приближение на функцията $f(x) = \sin(2\pi x)$ с полиноми на Бернщайн за $n = 1, 3, 5, 10, 50$. Ясно се вижда, че редицата клони към функцията $f(x)$ с увеличаване на степента n.

Базисните функции

$$\varphi_{nk}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

са известни като базисни полиноми на Бернщайн и са полиноми от степен n, които пораждат пространството π_n. Базисът има особено важно значение в практиката. Той се използва за базис на т.нар. **криви на Безие** (Bézier curves), които играят основна роля при моделирането в компютърната графика. Кривата на Безие $\mathbf{B}(t)$ от степен n е линейна комбинация на базисните полиноми на Бернщайн от степен n с коефициенти т.нар. контролни точки $\mathbf{P_0}, \mathbf{P_1}, \dots, \mathbf{P_n}$, които са точки в равнината или в пространството:

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P_k} \varphi_{nk}(t), \ \ t \in [0,1].$$

За $n = 1$ имаме линейна крива на Безие (отсечка между $\mathbf{P_0}$ и $\mathbf{P_n}$); за $n = 2$ имаме квадратична крива и т.н. Всяка крива на Безие е гладка крива, която започва в точката $\mathbf{P_0}$ и завършва в точката $\mathbf{P_n}$, а вътрешните контролни точки контролират нейната форма.
Преместването (промяната) на контролните точки на кривата на Безие дава различни криви в равнината/пространството. Последното и фактът, че те зависят само от един параметър, t, ги прави изключително удобни за използване в комптърната графика, вж. например How Computers Draw Curves—Bézier Curves Explained.

Задача 1. Докажете, че ако $f \in C^1[0,1]$, то за производната на полинома на Бернщайн е изпълнено

$$B'_{n+1}(f;t) = \sum_{k=0}^{n} f'(\xi_k) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k},$$

където $\xi_k \in \left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right]$, $k = 0, \ldots, n$.

Доказателство. От дефиницията за полином на Бернщайн от $(n+1)$-ва степен следва, че

$$B_{n+1}(f;t) = \sum_{k=0}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+1}{k} t^k (1-t)^{n+1-k}.$$

Диференцираме

$$\begin{aligned}
B'_{n+1}(f;t) &= \sum_{k=0}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+1}{k} k\ t^{k-1}(1-t)^{n+1-k} \\
&+ \sum_{k=0}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+1}{k} t^k (n+1-k)(1-t)^{n+1-k-1}(-1) \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+1}{k} k\ t^{k-1}(1-t)^{n+1-k} \\
&+ \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+1}{k} t^k (n+1-k)(1-t)^{n+1-k-1}(-1) + 0.
\end{aligned}$$

За да можем да съберем двете суми, ще запишем първата в следния вид

$$\sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+1}{k} k\ t^{k-1}(1-t)^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)\binom{n+1}{k+1}(k+1)\ t^k(1-t)^{n-k},$$

където сме заместили k с $k+1$ и сме пуснали k да върви от 0 до n. Заместваме последното в горния израз за $B'_{n+1}(f;t)$:

$$\begin{aligned}
B'_{n+1}(f;t) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)\binom{n+1}{k+1}(k+1)\ t^k(1-t)^{n-k} \\
&- \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+1}{k}(n+1-k) t^k (1-t)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} t^k(1-t)^{n-k}\left[f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)\binom{n+1}{k+1}(k+1) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+1}{k}(n+1-k)\right].
\end{aligned}$$

Нека сега опростим сумата в квадратните скоби. Ще разгледаме последователно двата израза:

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k+1}(k+1) &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}(k+1) = \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!}, \\
\binom{n+1}{k}(n+1-k) &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}(n+1-k) = \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!}.
\end{aligned}$$

Заместваме последните:

$$B'_{n+1}(f;t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!}\ t^k(1-t)^{n-k}\left[f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right].$$

От теоремата за крайните нараствания следва, че $\exists$ т. $\xi_k \in \left[\dfrac{k}{n+1}, \dfrac{k+1}{n+1}\right]$ такава, че

$$f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right) = f'(\xi_k)\left(\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n+1}\right) = \frac{f'(\xi_k)}{n+1}.$$

Получаваме окончателно

$$\begin{aligned} B'_{n+1}(f;t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!}\, t^k (1-t)^{n-k} \frac{f'(\xi_k)}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cancel{(n+1)}n!}{k!(n-k)!}\, t^k (1-t)^{n-k} \frac{f'(\xi_k)}{\cancel{n+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} f'(\xi_k) \frac{n!}{k!(n-k)!}\, t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} f'(\xi_k) \binom{n}{k}\, t^k (1-t)^{n-k}. \end{aligned}$$

$\square$

Глава 11

Приближение в Хилбертово пространство

В предишното упражнение разгледахме задачата за намиране на най-добро приближение на елемента f от F от някое крайномерно подпространство на F. В частност казахме, че задачата има единствено решение, ако пространството F е строго нормирано. Днес ще се спрем на така наречените **Хилбертови пространства**, които имат приложение в различни математически задачи.

Определение 15. Ще казваме, че в пространството F е въведено скаларно произведение, ако на всеки два елемента f и g от F се съпоставя число (f, g), което удовлетворява условията:

1. $(f, f) \geq 0$, като $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$;
2. $(f, g) = (g, f)$;
3. $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g, h \in F$.

Определение 16. Едно линейно пространство H ще наричаме Хилбертово, ако в него е въведено скаларно произведение и е пълно.
Забележка: Едно пространство H ще наричаме пълно, ако границата на всяка безкрайна редица от елементи от H също принадлежи на H.

Интересно

Хилбертовото пространство, въведено от David Hilbert през 1909 г., е обобщение на Евклидовото пространство. То е абстрактно векторно пространство (крайно- или безкрайномерно), в което е въведено скаларно произведение. **Да припомним, че скаларното произведение позволява да въведем геометрия в пространството, като чрез него можем да пресмятаме дължини и ъгли.**

И така, след като имаме понятието за скаларно произведение, всяко Хилбертово пространство може да бъде нормирано (аналогично на начина, по който пресмятаме дължина на вектор), като се въведе нормата

$$\|f\| := \sqrt{(f, f)},$$

която от своя страна поражда разстояние

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{(f - g, f - g)}.$$

Оттук нататък ще приемаме, че Хилбертовото пространство, с което работим, е метризирано по горния начин. Може да се покаже, че **всяко Хилбертово пространство е строго нормирано**, откъдето следва, че е в сила следващата теорема.

Теорема 21. За всяко f от H съществува единствен елемент на най-добро приближение от дадено крайномерно подпространство Ω_n.

Преди да разгледаме задачата за намиране на най-добро приближение, ще дадем пример за скаларно произведение между функции, като разгледаме един важен клас базиси на пространствата от полиноми, който има значение например за различни оптимизационни задачи.

11.1 Ортогонални полиноми

Определение 17. Нека $[a, b]$ е даден интервал, краен или безкраен. Нека $\mu(x)$ е функция, определена и неотрицателна в $[a, b]$, като

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mu(x)dx > 0$$

за всеки подинтервал $[\alpha, \beta]$ на $[a, b]$. Функцията $\mu(x)$ ще наричаме **теглова функция** или **тегло**.

Дефинираме скаларното произведение на две функции f и g, като:

$$(f, g) = \int_{a}^{b} \mu(x)f(x)g(x)dx.$$

Важно следствие от това, че сме въвели скаларно произведение, е, че вече имаме геометрия в пространството, т.е. можем да говорим за ъгли и в частност за ортогоналност.

Определение 18. Ще казваме, че функциите $f(x)$ и $g(x)$ са **ортогонални** в $[a, b]$ с тегло $\mu(x)$, ако $(f, g) = 0$.

Задача 1. Да се покаже, че функциите 1 и x са ортогонални с тегло $\mu(x) = 1$ в $[-1, 1]$.

Решение. Имаме

$$\int_{-1}^{1} \mu(x)f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} 1.1.xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0.$$

□

Тогава, подобно на векторите в равнината или пространството, за които често най-подходящият базис е ортогонален, можем да въведен базис от ортогонални полиноми.

Определение 19. Ще казваме, че $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots$ е крайна/безкрайна редица от ортогонални полиноми в $[a, b]$ с тегло $\mu(x)$, ако

1. $P_i(x)$ е полином от степен $i, \forall i$;
2. $(P_i, P_i) \neq 0, \forall i$;
3. $(P_i, P_j) = 0$ при $i \neq j$.

Всяко пространство от ортогонални полиноми има редица забележителни свойства. Да припомним някои от тях:

- Всяка крайна подредица $P_0(x), \ldots, P_n(x)$ на редицата

  $$P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots$$

  е линейно независима система от функции;

- Всеки полином $f(x)$ от π_n може да се представи като линейна комбинация на $P_0(x), \dots, P_n(x)$ (те образуват базис), т.е.
$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i(x);$$
- За всеки полином $f \in \pi_{n-1}$ е в сила $(f, P_n) = 0$;
- $\forall n \in \mathbb{N}$ полиномът $P_n(x)$ има точно n различни реални нули, които лежат в (a, b).

Теорема 22. При даден интервал $[a, b]$, тегло $\mu(x)$ и старши коефициент α_n, съществува единствен полином от вида
$$P_n(x) = \alpha_n x^n + \text{полином от } \pi_{n-1},$$
ортогонален на всички полиноми от π_{n-1}.

Последната теорема ни дава възможност да построим редица от ортогонални полиноми за фиксирани теглова функция и старши коефициенти.

Задача 2. Да се намерят първите три ортогонални полинома с водещи коефициенти, равни на 1, при тегло $\mu(x) = 1$ в интервала $[-1, 1]$.

Решение. Искаме да определим първите три полинома $p_0(x) \in \pi_0, p_1(x) \in \pi_1, p_2(x) \in \pi_2$ от редицата ортогонални полиноми със старши коефициенти 1 и тегло 1. Очевидно $p_0(x) \equiv 1$. Търсим $p_1(x) = 1.x + b_1$ така, че да бъде ортогонален на $p_0(x)$, т.е. от условието
$$(p_0(x), p_1(x)) = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} 1.(1.x + b_1)dx = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} + \left.b_1 x\right|_{-1}^{1} = 0 \Longleftrightarrow 2b_1 = 0 \Longrightarrow b_1 = 0.$$

Остана да определим $p_2(x) = x^2 + b_2 x + c_2$, като използваме условията за ортогоналност
$$\left|\begin{aligned} &(p_0(x), p_2(x)) = 0 \\ &(p_1(x), p_2(x)) = 0 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} 1.(x^2 + b_2 x + c_2).1dx = 0 \\ &\int_{-1}^{1} 1.(x^2 + b_2 x + c_2).xdx = 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{aligned} &\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} + b_2 \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} + \left.c_2 x\right|_{-1}^{1} = 0 \\ &\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} + b_2 \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} + c_2 \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0 \end{aligned}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{aligned} &\frac{1}{3} - \frac{(-1)}{3} + \frac{b_2}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) + c_2(1 - (-1)) = 0 \\ &\frac{1}{4} - \frac{(-1)^4}{4} + b_2\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) + c_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0 \end{aligned}\right. .$$

Решаваме последната система и получаваме $b_2 = 0,\ c_2 = -\frac{1}{3}$, т.е. $p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$. Получихме редицата от ортогонални полиноми
$$1,\ x,\ x^2 - \frac{1}{3}.$$
□

Примери за ортогонални полиноми са например:

- Полиномите на Чебишов от първи род, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Те образуват редица от ортогонални полиноми в $[-1, 1]$ с тегло $\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

- Полиномите на Льожандър $L_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, n = 0, 1, \ldots$ образуват ортогонална система в $[-1, 1]$ при тегло $\mu(x) = 1$.

Първите три полинома на Льожандър изглеждат така:

$$L_0(x) = 1,\ L_1(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)' = x,\ L_2(x) = \frac{1}{8}\left[(x^2-1)^2\right]'' = \frac{1}{8}(4x(x^2-1))' = \frac{12x^2-4}{8} = \frac{3x^2-1}{2}.$$

Да обърнем внимание, че $L_n(x)$ е полином от степен точно n.

Задача 3. Да се покаже, че полиномите на Льожандър

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}, n = 0, 1, \ldots,$$

удовлетворяват $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$.

Доказателство. За да покажем твърдението от условието, ще интегрираме по части горния интеграл:

$$\int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx = xL_n^2(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} x dL_n^2(x) = L_n^2(1) + L_n^2(-1) - 2\int_{-1}^{1} xL_n(x)L_n'(x)dx.$$

Заместваме $L_n^2(1) = 1$ и $L_n^2(-1) = 1$:

$$\int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx = 1 + ((-1)^n)^2 - 2\int_{-1}^{1} xL_n(x)L_n'(x)dx = 2 - 2\int_{-1}^{1} xL_n(x)L_n'(x)dx.$$

Нека сега видим какво можем да кажем за последния интеграл от $L_n(x)$ и $xL_n'(x)$. Тъй като $L_n(x)$ е полином от точно n-та степен, то той се представя във вида

$$L_n(x) = \alpha_n x^n + \text{ полином от } \pi_{n-1}.$$

Следователно

$$L_n'(x) = n\alpha_n x^{n-1} + \text{полином от } \pi_{n-2}.$$

и

$$xL_n'(x) = n\alpha_n x^n + \text{ полином от } \pi_{n-1} = nL_n(x) + \text{ полином от } \pi_{n-1} := nL_n(x) + P(x),\ P(x) \in \pi_{n-1}.$$

Имаме

$$\int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx = 2 - 2\int_{-1}^{1} L_n(x)(nL_n(x) + P(x))dx = 2 - 2\left(\int_{-1}^{1} nL_n^2(x)dx + \underbrace{\int_{-1}^{1} L_n(x)P(x)dx}_{(L_n(x),P(x))=0}\right).$$

В последното използвахме, че $L_n(x)$ е $n-$тият полином на Льожандър, ортогонален на всеки полином $P(x) \in \pi_{n-1}$ с тегло $\mu(x) = 1$ в $[-1, 1]$. Полагаме $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx$ и го изразяваме от последното уравнение:

$$I = 2 - 2nI \Longrightarrow I = \frac{2}{2n+1}.$$

□

11.2 Средноквадратични приближения с алгебрични полиноми

Нека $[a,b]$ е даден интервал (краен/безкраен). Нека $\mu(x)$ е интегруема теглова функция в $[a,b]$ и означим с $L_2[a,b]$ пространството от всички функции, които са определени в $[a,b]$, за които интегралът

$$\int_a^b \mu(x)f^2(x)dx$$

е крайно число (ще пишем $\int_a^b \mu(x)f^2(x)dx < \infty$). Ще казваме, че тези функции са интегруеми в квадрат. В последното линейно пространство въвеждаме скаларно произведение

$$(f,g) = \int_a^b \mu(x)f(x)g(x)dx.$$

Скаларното произведение от своя страна поражда **средноквадратичната норма**

$$\|f\|_{L_2[a,b]} := \sqrt{\int_a^b \mu(x)f^2(x)dx}$$

и **средноквадратично разстояние**

$$\rho(f,g) := \|f(x)-g(x)\|_{L_2[a,b]} = \sqrt{\int_a^b \mu(x)(f(x)-g(x))^2dx}.$$

Може да се покаже, че пространството L_2 е **Хилбертово пространство**, което означава, че задачата за намиране на най-добро приближение от крайномерно подпространство има единствено решение. И така, разглеждаме задачата за намиране на **най-добро средноквадратично приближение** на дадена функция $f \in L_2[a,b]$ с елемент от някое подпространство Ω_n на $L_2[a,b]$, което се поражда от линейно независимите функции $\varphi_0(x),\dots,\varphi_n(x) \in L_2[a,b]$. От казаното дотук следва, че е в сила следната теорема.

Теорема 23. За всяка функция f от $L_2[a,b]$ съществува единствен обобщен полином

$$p^*(x) = \sum_{k=0}^n a_k^*\varphi_k(x),$$

за който $\rho(f,p^*) \le \rho(f,p), \forall p \in \Omega_n$, или е в сила

$$\int_a^b \mu(x)\left[f(x)-p^*(x)\right]^2 dx = \min_{(a_0,\dots,a_n)} \int_a^b \mu(x)\left[f(x)-\sum_{k=0}^n a_k\varphi_k\right]^2 dx.$$

Ние ще разгледаме задачата за **приближаване с алгебричен полином**, т.е. $\Omega_n \equiv \pi_n$. Последното пространство има базис $\varphi_k = x^k, k=\overline{0,n}$. Полиномът на най-добро средноквадратично приближение е този полином, за който средноквадратичната норма на грешката е минимална. Стойността на нормата за грешката $f(x)-p^*(x)$

$$\rho(f,p^*) := \|f(x)-p^*(x)\|_{L_2[a,b]} = \sqrt{\int_a^b \mu(x)(f(x)-p^*(x))^2dx}.$$

ще наричаме **най-добро средноквадратично приближение**.

Задача 4. Да се намери полиномът на най-добро средноквадратично приближение (ПНДСКП) от π_1 за $f(x) = \sqrt{x}$ в $[0, 1]$ при тегло $\mu(x) = 1$.

Решение. Нека означим с $p(x) = ax + b$ полинома на най-добро средноквадратично приближение. Искаме да определим a и b така, че средноквадратичното разстояние между f и p да бъде възможно най-малко. Имаме

$$\|f - p\|_{L_2[0,1]} = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - p(x))^2 dx}.$$

За да намерим минималното разстояние, ще намерим минимума на функцията под корена

$$\begin{aligned}\Psi(a, b) &= \int_0^1 (\sqrt{x} - (ax + b))^2 dx = \int_0^1 (x - 2\sqrt{x}(ax + b) + (ax + b)^2) dx \\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - 2a\frac{x^{5/2}}{5/2}\Big|_0^1 - 2b\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 + \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{4a}{5} - \frac{4b}{3} + \frac{(a+b)^3}{3a} - \frac{b^3}{3a} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{a^2}{3} - \frac{4a}{5} + ab - \frac{4b}{3} + b^2.\end{aligned} \tag{11.1}$$

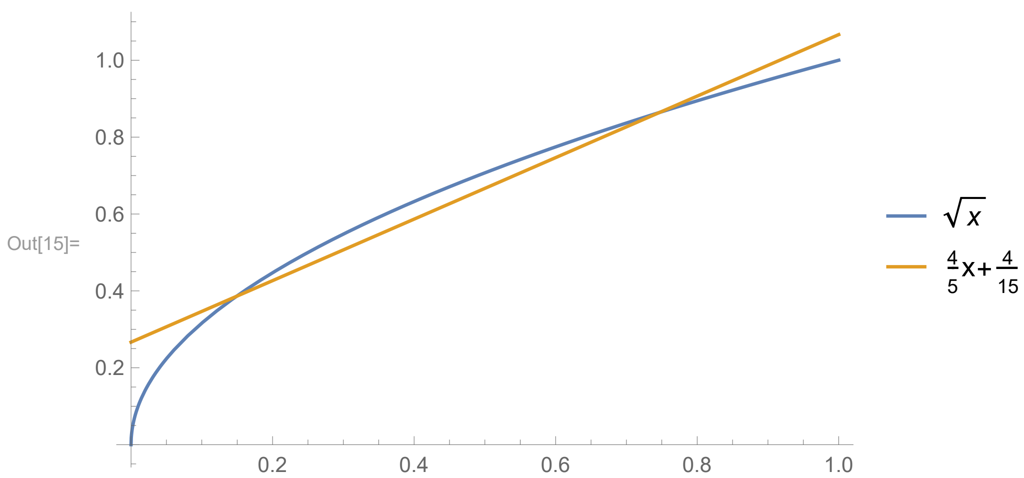
Да обърнем внимание, че от гледна точка на това да намерим неизвестните параметри, няма значение дали ще търсим минимума на

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - (ax + b))^2 dx \qquad \text{или} \qquad \sqrt{\int_0^1 (\sqrt{x} - (ax + b))^2 dx},$$

тъй като двата минимума се достигат за едни и същи a, b. От друга страна, коренът вкарва нелинейност в задачата, което я прави трудна за решаване. За да намерим минимума, ще използваме необходимото условие за съществуване на екстремум на функция на две променливи:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Psi}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial b} = 0 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{2a}{3} - \dfrac{4}{5} + b = 0 \\ a - \dfrac{4}{3} + 2b = 0 \end{array}\right. .$$

Решаваме системата и получаваме $p(x) = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{4}{15}$. За да пресметнем най-доброто средноквадратично приближение заместваме $a = 4/5, b = 4/15$ в нормата на грешката, т.е. в $\sqrt{\Psi(a, b)}$, откъдето получаваме $\sqrt{\Psi(4/5, 4/15)} = \sqrt{\dfrac{1}{450}}$.



□

В предишното упражнение разгледахме задачата за намиране на ПНДРП в същия интервал, като получихме, че той е $p(x) = x + \dfrac{1}{8}$, а най-доброто равномерно приближение беше 1/8. На практика, двете решения не могат да бъдат сравнени, защото са пресметнати за различни норми. **Можем да правим сравнение, когато разглеждаме обекти в една и съща норма.**

Сега ще разгледаме един друг подход за намиране на най-добро приближение в Хилбертово пространство. За целта ще използваме твърдение, доказано на лекции, което ни дава НДУ един обобщен полином да бъде полином на най-добро приближение.

Твърдение 2. Нека H е произволно Хилбертово пространство и $f \in H$. Елементът p^* е елемент на най-добро приближение за f с елементи от Ω_n тогава и само тогава, когато

$$(f - p^*, \varphi_k) = 0, k = \overline{0, n},$$

където $\varphi_k(x), k = \overline{0, n}$, са базисните функции на пространството Ω_n.

С други думи, за да намерим ПНДСКП от π_n трябва да решим системата, получена от скаларните произведения на грешката $f - p^*$ и всеки от базисните полиноми на π_n. Нека го приложим върху горната задача.

Задача 5. Да се намери ПНДСКП от π_1 за $f(x) = \sqrt{x}$ в $[0, 1]$ при тегло $\mu(x) = 1$.

Решение. Нека отново означим полинома на най-добро средноквадратично приближение с $p(x) = ax + b$. От Твърдение 2 следва, че за него е в сила системата:

$$\left|\begin{aligned}&(f-p,1)=0\\&(f-p,x)=0\end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{aligned}&\int_0^1(\sqrt{x}-(ax+b)).1dx=0\\&\int_0^1(\sqrt{x}-(ax+b)).xdx=0\end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{aligned}&\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}-a\frac{x^2}{2}-bx\right)\Big|_0^1=0\\&\left(\frac{x^{5/2}}{5/2}-a\frac{x^3}{3}-b\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=0\end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned}&\frac{2}{3}-\frac{a}{2}-b=0\\&\frac{2}{5}-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}=0\end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad a=\frac{4}{5},\ b=\frac{4}{15}.$$

□

Задача 6 (не е правена на упражнение)**.** Да се намери ПНДСКП от π_2 за $f(x) = |x|$ в $[-1, 1]$ при тегло $\mu(x) = 1$.

Решение. Нека означим ПНДСКП с $p(x) = ax^2 + bx + c$. За да го получим, ще решим системата:

$$\left|\begin{aligned}&(f-p,1)=0\\&(f-p,x)=0\\&(f-p,x^2)=0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{aligned}&\int_{-1}^1(|x|-(ax^2+bx+c))dx=0\\&\int_{-1}^1(|x|x-(ax^3+bx^2+cx))dx=0\\&\int_{-1}^1(|x|x^2-(ax^4+bx^3+cx^2))dx=0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{aligned}&\int_{-1}^1|x|dx-\int_{-1}^1(ax^2+bx+c)dx=0\\&\int_{-1}^1x|x|dx-\int_{-1}^1(ax^3+bx^2+cx)dx=0\\&\int_{-1}^1x^2|x|dx-\int_{-1}^1(ax^4+bx^3+cx^2)dx=0\end{aligned}\right. . \tag{11.2}$$

Да пресметнем последователно интегралите:

$$\int_{-1}^{1}|x|dx = \int_{-1}^{0}(-x)dx + \int_{0}^{1}xdx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} = 1, \qquad \int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)dx = \frac{2a}{3}+2c,$$

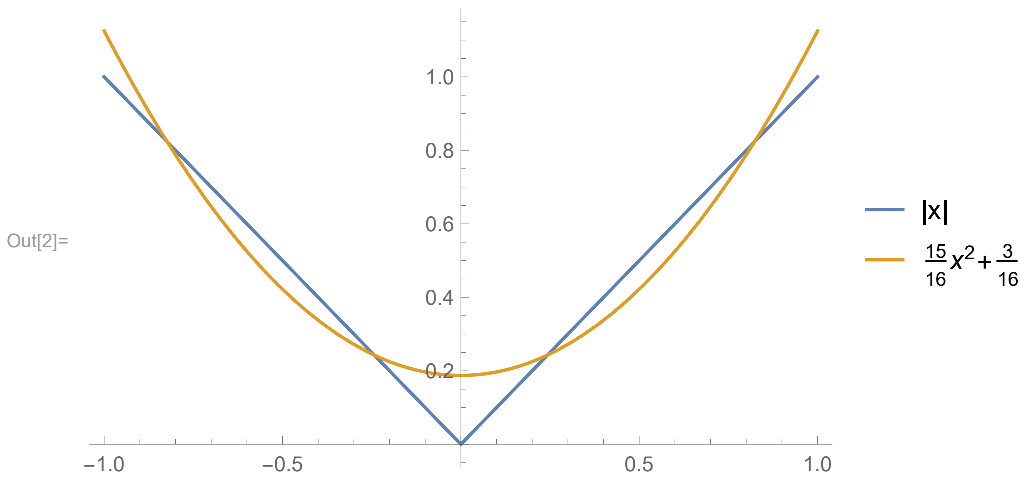
$$\int_{-1}^{1}x|x|dx = \int_{-1}^{0}(-x^2)dx + \int_{0}^{1}x^2dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1} = 0, \qquad \int_{-1}^{1}(ax^3+bx^2+cx)dx = \frac{2b}{3},$$

$$\int_{-1}^{1}x^2|x|dx = \int_{-1}^{0}(-x^3)dx + \int_{0}^{1}x^3dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2}, \qquad \int_{-1}^{1}(ax^4+bx^3+cx^2)dx = \frac{2a}{5}+\frac{2c}{3}.$$

Заместваме полученото в системата от интегрални уравнения (11.2) и получаваме:

$$\left|\begin{array}{l} 1-\dfrac{2a}{3}-2c=0 \\ 0-\dfrac{2b}{3}=0 \\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{2a}{5}-\dfrac{2c}{3}=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow a=\frac{15}{16},\ b=0,\ c=\frac{3}{16}.$$

Графиката на функцията $|x|$ и ПНДСКП $p(x)=\dfrac{15}{16}x^2+\dfrac{3}{16}$ е показана по-долу.



Намерете най-доброто средноквадратично приближение. □

Допълнителни задачи

Задача 7. Проверете дали функциите $f(x)=e^x$ и $g(x)=1$ са ортогонални с тегло $\mu(x)=1$ в интервала $[0,1]$.

Задача 8. Намерете средноквадратичното разстояние с тегло $\mu(x)=1$ между функциите $f(x)=x$ и $g(x)=x^2$ в интервала $[0,1]$.

Задача 9. Да се построят първите три ортогонални полинома $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ в интервала $[0,1]$ със старши коефициент 1 и тегло $\mu(x)=x$.

Задача 10. Да се намери полиномът на най-добро средноквадратично приближение (ПНДСКП) от π_1 за функцията $f(x)$ с тегло $\mu(x)=1$, ако (а) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, x \in [0,1]$;

(б) $f(x) = e^{-x},\ x \in [-1,1]$;

(в) $f(x) = \sin 2x,\ x \in [0,\pi]$.

Отг. (а) $p(x) = (12 - 18\ln 2)x + 10\ln 2 - 6$; (б) $p(x) = -\dfrac{12}{5}x - \dfrac{1}{2}$; (в) $p(x) = -\dfrac{6}{\pi^2}x + \dfrac{3}{\pi}$.

Глава 12

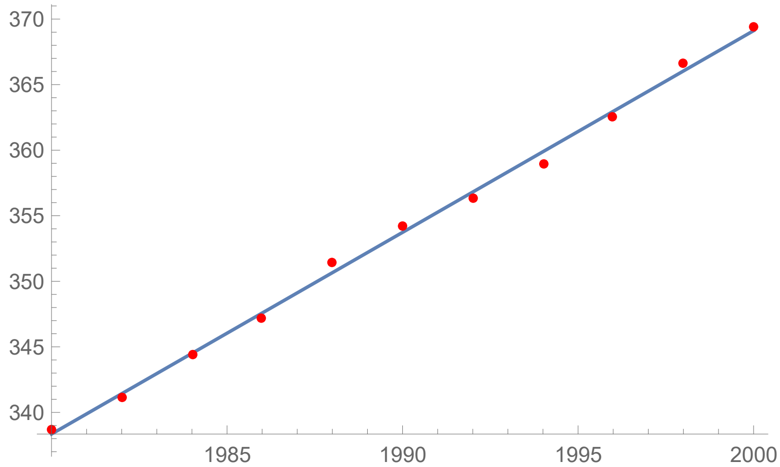
Метод на най-малките квадрати

В тази глава ще разгледаме една задача, която е дискретен вариант на задачата за намиране на най-добро средноквадратично приближение и е често срещана на практика. Нека са дадени точките (x_0, y_0),…,(x_n, y_n). Както отбелязахме, една възможна интерпретация на тази задача, от гледна точка на практиката, е че са направени краен брой измервания (експерименти) при изследването на дадено явление и търсим функция, която да моделира явлението, като отговаря на тези емпирични резултати. Един възможен начин е да намерим интерполационна функция, чиято графика минава през тези точки. И с най-съвършената техника обаче има някаква допустима грешка при правенето на тези измервания. В много случаи тази грешка не може да бъде пренебрегната. Тогава какъв би бил смисълът да намерим функция, която да минава през тези точки, след като дори самите те не са „на мястото си”? Друг проблем, който видяхме при интерполацията е, че често полиномите от висока степен имат „лошо” поведение, т.е. може да имаме проблеми при моделирането на явление, за което искаме да приближим голямо количество данни.

Оказва се, че можем да постъпим и по друг начин – да търсим функция, която следва поведението на данните (без задължително да съвпада с тях в която и да е точка) и която е „близо” до тези данни.

Преди да коментираме самия метод, нека разгледаме няколко реални процеса и да коментираме каква функция е подходяща, за да ги опише (на база на данните, които имаме).

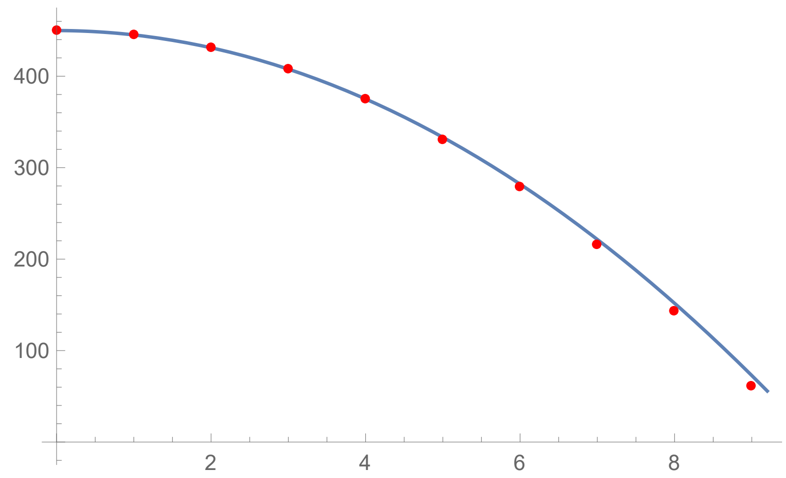
- На графиката са дадени данни за това как нивото на въглеродния диоксид в атмосферата се е изменяло в периода 1980 – 2000:



Графиката ни показва, че би било удачно да моделираме разглежданото явление с линейна функция. С други думи, ще търсим приближението във вида $f(x) = ax + b$.

- Топка е пусната от височина 450 метра. Нейната височина е измервана през интервали от 1 секунда:

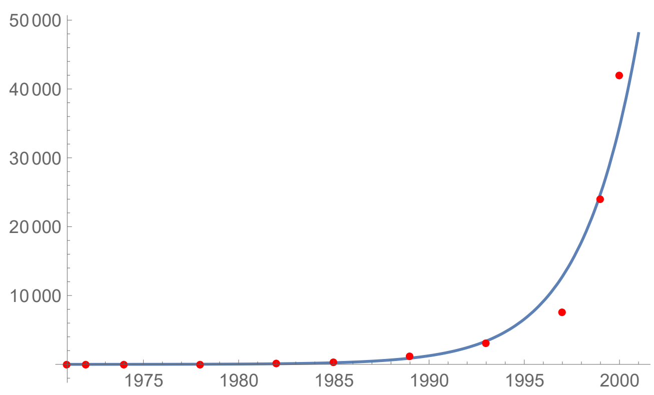
t, sec	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h, m	450	445	431	408	375	332	279	216	143	61



Тук точките оформят парабола, затова ще търсим функцията, моделираща процеса, във вида $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Разглеждаме как се изменя броят на транзисторите в един процесор в хиляди, в зависимост от годината:

Год.	1971	1972	1974	1978	1982	1985	1989	1993	1997	1999	2000
Бр. ($\times$1000)	2.25	2.5	5	29	120	275	1180	3100	7500	24000	42000



Тук, на база на експерименталните данни, следва да търсим експоненциална зависимост. Ще търсим функцията във вида $f(x) = ae^{bx}$.

И така, от горните примери е ясно, че след като сме избрали вида на функцията, с която ще приближаваме, трябва да определим параметрите в нея (например коефициентите на квадратния тричлен във втория пример) така, че функцията да се окаже възможно „най-близо” до данните, които приближаваме. Първото, което трябва да направим, е вече да формализираме понятието „близо”. Както вече знаем, това означава да въведем някаква норма и породено от нея разстояние.

Нека точките, които искаме да приближим, имат координати

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n),$$

а $f(x)$ е функция, с която ги приближаваме. Да означим с e_i грешката, допусната в т. x_i, т.е.

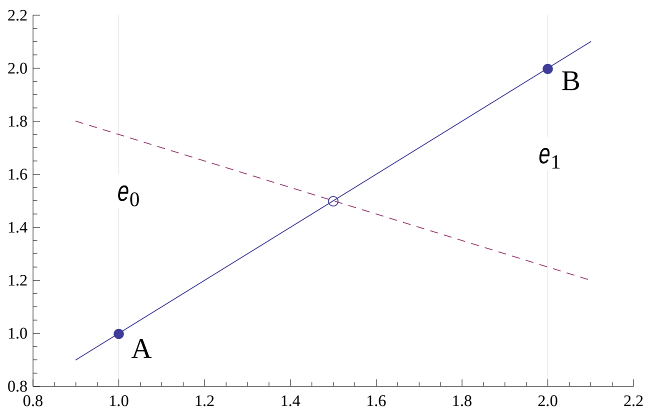
$$e_i := f(x_i) - y_i.$$

Ще разгледаме някои възможни (но, по една или друга причина, неудачни) начини, за да дефинираме понятието „най-близо”:

- Първата очевидна идея е да търсим функцията $f(x)$ така, че сумата от всички грешки да е възможно най-малка, т.е. да е възможно най-малък изразът

  $$\sum_{i=0}^{n} e_i.$$

  Да разгледаме обаче следния пример (вж. фигурата). Нека са дадени две точки в равнината $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$. Търсим линейна функция, която да минава „най-близо” до тях. Очевидно, това би следвало да е правата, която минава през тези две точки. Но, ако вземем произволна друга права, която минава през средата на отсечката AB, за нея също ще е изпълнено $e_0 + e_1 = 0$, тъй като в точките A и B грешките ще имат една и съща абсолютна стойност и ще са различни по знак. С други думи, всяка такава права ще удовлетворява условието $\sum\limits_{i=0}^{n} e_i$ да е минимално.

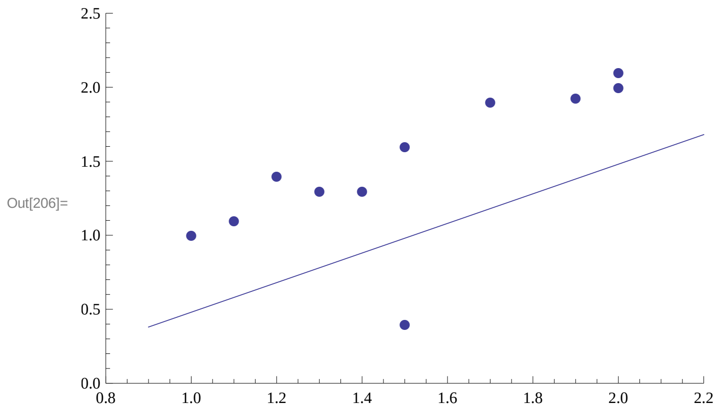


- Възможен начин да избегнем проблема е да не позволим грешките да бъдат с различни знаци, т.е. да ги вземаме по модул и да поставим условието функцията $f(x)$ да е избрана така, че

  $$\sum_{i=0}^{n} |e_i|$$

  да е минимално. Оказва се обаче, че и при това условие (макар и напълно логично и удовлетворително) в общия случай не можем да намерим единствена функция, която да го изпълнява.

- Можем да изберем функцията $f(x)$ така, че да е най-малка максималната грешка, т.е. да е най-малко
$$\max_{i=0,\dots,n} e_i.$$
Да вземем обаче следния пример:



Всички точки, с изключение на една, лежат приблизително на права, но тази „странична" точка, която вероятно е резултат от шум или грешка в измерванията, има в някакъв смисъл същото влияние върху избора на правата, както всички останали, взети заедно.

И така, след като показахме някои неудачни начини, сега вече да се концентрираме върху същността на **метода на най-малките квадрати** (англ. **least squares method**). Търсим функцията $f(x)$ така, че
$$\sum_{i=0}^{n} e_i^2$$
да е възможно най-малко. Освен, че решава проблема с наличието на различни знаци при сумирането на грешките, оказва се, че този подход води и до единствено решение.

Задачата за минимизиране на тази сума може да се интерпретира и по друг начин. Нека означим с $\vec{y}$ и $\vec{F}$ съответно векторите с елементи точните и приближените стойности, т.е.
$$\vec{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n)^T, \quad \vec{F} = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n))^T.$$
Тогава $\vec{e} = \vec{F} - \vec{y}$ ще бъде векторът с грешките $\vec{e} = (e_0, e_1, \dots, e_n)^T$, за който имаме
$$\|\vec{e}\|_2 = \sqrt{e_0^2 + e_1^2 + \dots + e_n^2}.$$
Така задачата за минимизиране сумата $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} e_i^2$ можем да разглеждаме и като задача за минимизиране на въведената норма на вектора на грешката. Както знаем, тя е породена от скаларно произведение, тъй като това е стандартната дължина на вектор в $\mathbb{R}^n$.

Следващата стъпка е да покажем как точно ще намерим функцията $f(x)$ така, че тази сума да е възможно най-малка. Ще го покажем със следващата задача.

Задача 1. Да се намери линейна функция, която приближава по метода на най-малките квадрати таблицата

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2	4	5	4	5

Решение. От условието следва, че ще търсим функцията във вида $f(x) = ax + b$. Трябва да определим параметрите a и b така, че

$$\sum_{i=0}^{4} e_i^2 = \sum_{i=0}^{4} (f(x_i) - y_i)^2$$

да е възможно най-малко. Имаме

$$f(1) = a + b;\ f(2) = 2a + b;\ f(3) = 3a + b;\ f(4) = 4a + b;\ f(5) = 5a + b.$$

Тогава

$$\sum_{i=0}^{4} e_i^2 = (a + b - 2)^2 + (2a + b - 4)^2 + (3a + b - 5)^2 + (4a + b - 4)^2 + (5a + b - 5)^2.$$

Разглеждаме този израз като функция на двете променливи a и b – нека я означим с $\Phi(a, b)$. Както знаем, необходимо условие тази функция да има минимум в дадена точка е първите частни производни по отношение на всеки параметър (променлива на функцията) да са нули. Следователно трябва да намерим решението на системата

$$\left|\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial a} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} &= 0 \end{aligned}\right. .$$

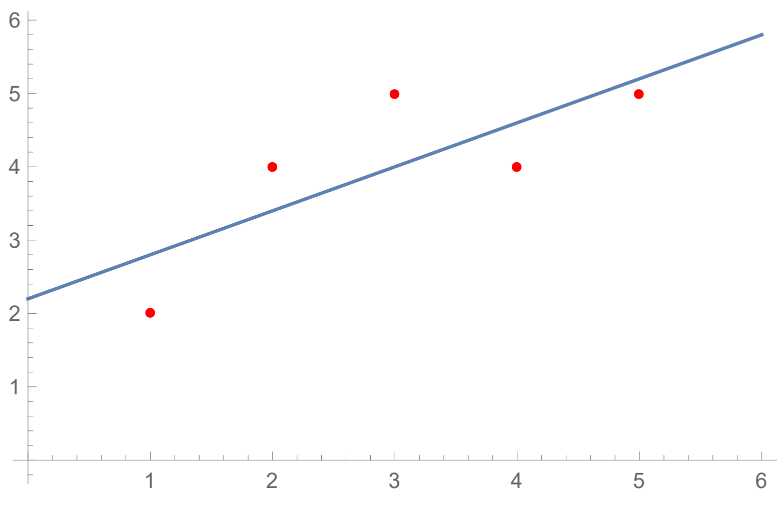
По този начин получаваме система с толкова уравнения, колкото са и параметрите в задачата:

$$\left|\begin{aligned} 2(a + b - 2) + 4(2a + b - 4) + 6(3a + b - 5) + 8(4a + b - 4) + 10(5a + b - 5) = 0 \\ 2(a + b - 2) + 2(2a + b - 4) + 2(3a + b - 5) + 2(4a + b - 4) + 2(5a + b - 5) = 0 \end{aligned}\right. .$$

Решаваме я и еднозначно определяме $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{11}{5}$. Така получихме линейната функция

$$f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{11}{5}.$$

Графиката ѝ и данните от таблицата са показани на фигурата по-долу.



□

Задача 2. Да се намери линейна функция, която приближава по метода на най-малките квадрати таблицата

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1	2	1	0	4

Решение. Отново търсим функцията във вида $f(x) = ax + b$. Трябва да определим параметрите a и b така, че функцията

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=0}^{4} e_i^2 = (b-1)^2 + (a+b-2)^2 + (2a+b-1)^2 + (3a+b-0)^2 + (4a+b-4)^2$$

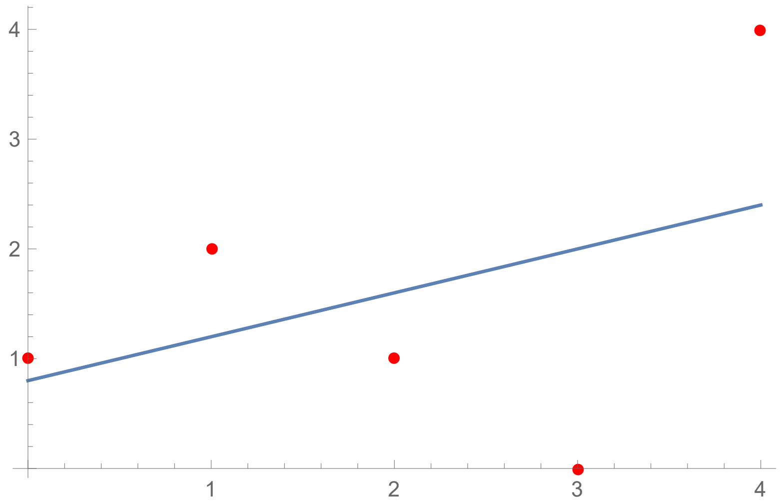
да има минимум. Използваме необходимото условието за минимум в точка и взимаме частните производни да са 0:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 2(a+b-2) + 2(2a+b-1).2 + 2(3a+b).3 + 2(4a+b-4).4 = 0 \\ 2(b-1) + 2(a+b-2) + 2(2a+b-1) + 2(3a+b) + 2(4a+b-4) = 0 \end{array} \right. .$$

Решаваме я и еднозначно определяме $a = \dfrac{2}{5}$, $b = \dfrac{4}{5}$. Така получихме търсената функция във вида

$$f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}.$$

Графиката на линейната функция и данните от таблицата са показани на фигурата по-долу.



□

Задача 3. По метода на най-малките квадрати да се намери парабола, която приближава таблицата

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1	1.8	1.3	2.5	6.3

Решение. Търсим функцията във вида $f(x) = ax^2 + bx + c$. Трябва да минимизираме сумата

$$\sum_{i=0}^{5} e_i^2 = (f(0)-1)^2 + (f(1)-1.8)^2 + (f(2)-1.3)^2 + (f(3)-2.5)^2 + (f(4)-6.3)^2$$
$$= (c-1)^2 + (a+b+c-1.8)^2 + (4a+2b+c-1.3)^2 + (9a+3b+c-2.5)^2 +$$
$$+ (16a+4b+c-6.3)^2 = \Phi(a,b,c)$$

За да бъде минимална тази сума, коефициентите a, b, c трябва да са такива, че да удовлетворяват системата

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \end{array} \right. .$$

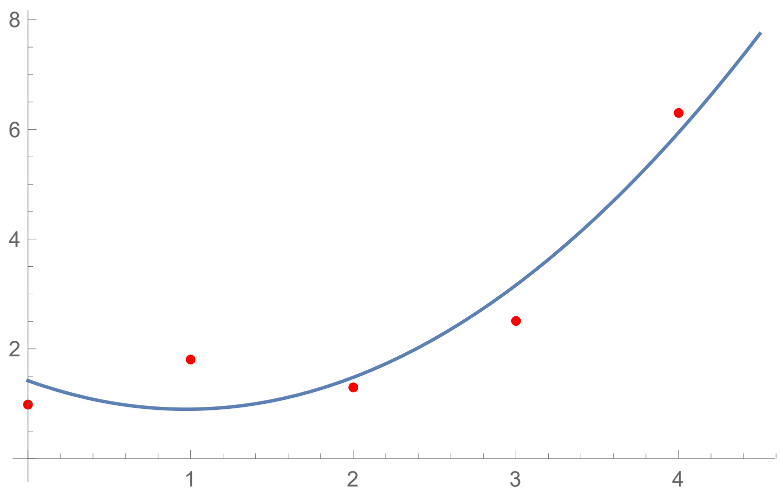
Нека решим тази система с помощта на Wolfram Mathematica:

```
In[70]:= Ψ[a_, b_, c_] = (-1 + c)² + (-1.8` + a + b + c)² + (-1.3` + 4 a + 2 b + c)² + (-2.5` + 9 a + 3 b + c)² + (-6.3` + 16 a + 4 b + c)²;
         Solve[{∂ₐΨ[a, b, c] == 0, ∂ᵦΨ[a, b, c] == 0, ∂꜀Ψ[a, b, c] == 0}]
Out[71]= {{a → 0.55, b → -1.07, c → 1.42}}
```

Получаваме окончателно

$$f(x) = 0.55x^2 - 1.07x + 1.42.$$

Параболата и данните от таблицата са показани на фигурата по-долу.



□

Обща задача за намиране на алгебричен полином, който приближава данни по метода на най-малките квадрати

Нека сега разгледаме в общ вид задачата за приближаване на точките

$$(x_0, y_0), \ldots, (x_s, y_s)$$

с алгебрични полиноми, т.е. ще търсим приближението във вида

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Функцията, която трябва да минимизираме, има вида

$$\Phi(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^{s} (f(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{s} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n - y_i)^2.$$

Ще разгледаме два подхода за решаване на последната задача.

- Първи начин

  За да определим коефициентите на полинома, трябва да решим системата

$$\left|\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = 0 \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0 \\ &\quad\vdots \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial a_n} = 0 \end{aligned}\right. .$$

  Може да се покаже, че последната система има единствено решение, което е и търсената точка на минимум на функцията Φ.

- Втори начин

  Сега ще изведем един друг възможен подход за решаване на последната система – чрез решаване на еквивалентна система уравнения. След като диференцираме Φ по отношение на всяко едно от неизвестните и разделим двете страни на всяко уравнение на 2, получаваме системата

$$\left|\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{s} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n - y_i) = 0 \\ &\sum_{i=0}^{s} [(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n - y_i) x_i] = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ &\sum_{i=0}^{s} [(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n - y_i) x_i^n] = 0 \end{aligned}\right. .$$

  Нека я запишем във векторно-матрична форма, за да видим как би изглеждала тя в общия случай. Записана в матричен вид, тази система изглежда така:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{s} 1 & \sum_{i=0}^{s} x_i & \sum_{i=0}^{s} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^{s} x_i^n \\ \sum_{i=0}^{s} x_i & \sum_{i=0}^{s} x_i^2 & \sum_{i=0}^{s} x_i^3 & \cdots & \sum_{i=0}^{s} x_i^{n+1} \\ \sum_{i=0}^{s} x_i^2 & \sum_{i=0}^{s} x_i^3 & \sum_{i=0}^{s} x_i^4 & \cdots & \sum_{i=0}^{s} x_i^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{s} x_i^n & \sum_{i=0}^{s} x_i^{n+1} & \sum_{i=0}^{s} x_i^{n+2} & \cdots & \sum_{i=0}^{s} x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{s} y_i \\ \sum_{i=0}^{s} x_i y_i \\ \sum_{i=0}^{s} x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{s} x_i^n y_i \end{bmatrix}. \tag{12.1}$$

Да означим матрицата на системата с X, вектор-стълба с коефициентите с $\vec{a}$ и вектор-стълба с десните страни с $\vec{b}$. Тогава системата добива вида

$$X\vec{a} = \vec{b}.$$

Решението ѝ (т.е. коефициентите на полинома) намираме по формулата

$$\vec{a} = X^{-1}\vec{b}.$$

Да обърнем внимание, че горната система е в сила за произволна задача. Записана във векторно-матрична форма, тя става по-удобна за решаване от алгоритмична гледна точка, т.е. за програмна реализация. Това, което трябва да се направи, е да се генерират матрицата X и векторът $\vec{b}$ и да се реши получената система.

Задача 4. По метода на най-малките квадрати да се намери полином от първа степен, който приближава точките

x	0	1	2	3	4
y	1	2	1	0	4

Решение. Търсим приближението във вида $f(x) = a_0 + a_1 x$. Вземайки предвид (12.1), трябва да решим матричното уравнение

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{4} 1 & \sum\limits_{i=0}^{4} x_i \\ \sum\limits_{i=0}^{4} x_i & \sum\limits_{i=0}^{4} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{4} y_i \\ \sum\limits_{i=0}^{4} x_i y_i \end{bmatrix}.$$

И така, получаваме

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{\vec{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 20 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}.$$

Сега имаме $\vec{a} = X^{-1}\vec{b}$. Решаваме в Mathematica:

```
In[1]:= X = {{5, 10}, {10, 30}};
        b = {{8}, {20}};
        a = Inverse[X].b // MatrixForm
```

Out[3]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Окончателно получихме $f(x) = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{4}{5}$. □

Допълнителни задачи

Задача 5. Като използвате МНМК, намерете полином $f(x)$ от първа степен, който приближава точките

(а)

x	1	2	3	4
y	0	1	1	2

(б)

x	-1	0	2	3
y	0	1	2	2

Отг. (а) $f(x) = 0.6x - 0.5$; (б) $f(x) = 0.5x + 0.75$.

Задача 6. Като използвате МНМК, намерете полином $f(x)$ от втора степен, който приближава точките

x	-1	0	1	2
y	0	2	3	9

Отг. $f(x) = x^2 + 1.8x + 1.1$.

Глава 13

Числено интегриране

Важен клас от числени методи са тези за приближено намиране на определени интеграли

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Ясно е, че голяма част от интегралите не могат да бъдат решени точно. Ето защо от изключителна важност е да се намерят начини, по които стойността на съответните интеграли да може да се намира с достатъчно добра точност.

Определение 20. Формула от вида

$$I(f) \approx \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k),$$

с която определеният интеграл се приближава с линейна комбинация на функционалните стойности в краен брой точки, се нарича **квадратурна формула**.

13.1 Интерполационни квадратурни формули

Първо ще разгледаме т.нар. **интерполационни квадратурни формули**. Последните се наричат така, защото са получени след като подинтегралната функция $f(x)$ е приближена с интерполационен полином, чиито възли лежат в интервала $[a, b]$. Разбира се, за възли на интерполационния полином могат да се изберат различни точки от този интервал. Ние ще се спрем на три основни квадратурни формули, получени за конкретен избор на възли.

- **Квадратурна формула на правоъгълниците**

  Квадратурната формула на правоъгълниците е интерполационна квадратурна формула, при която подинтегралната функция се приближава с интерполационен полином от нулева степен, т.е. $n = 0$, с възел $x_0 \in [a, b]$. Очевидно $L_0(f; x) = f(x_0)$. Използвайки полинома и теоремата за грешката при приближение с интерполационния полином, може да се покаже, че

  $$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b - a) + R(f),$$

  където $R(f)$ е грешката при приближеното интегриране на функцията f. Пренебрегвайки грешката, имаме

  $$\int_a^b f(x)dx \approx f(x_0)(b - a).$$

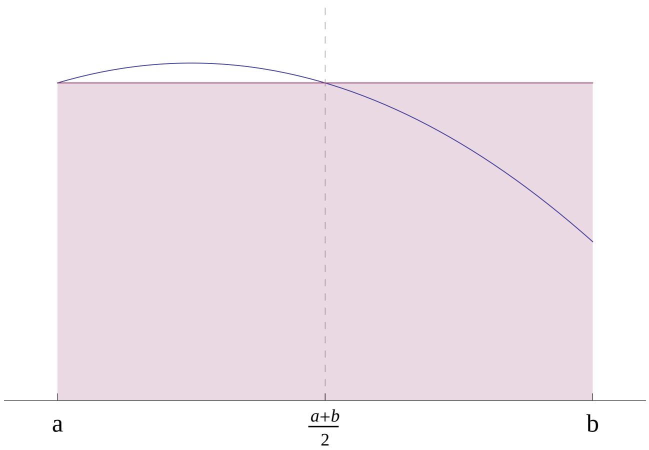
Остава да изберем възела x_0. Обикновено той се избира от множеството $\left\{a, \dfrac{a+b}{2}, b\right\}$. Ако изберем $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$, получаваме така наречената **формула на централните правоъгълници** (често се нарича просто формула на правоъгълниците)

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

За грешката при приближение с квадратурната формула на правоъгълниците е в сила (виж лекции)

$$R(f) = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3, \quad \xi \in (a,b).$$

Геометричният смисъл на тази формула е следният – вместо лицето на криволинейния трапец, заключен под графиката на функцията $f(x)$, намираме лицето на правоъгълника със страни $b-a$ и $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.



Аналогично се получават формулата на **левите** ($x_0 = a$) и **десните правоъгълници** ($x_0 = b$), на които няма да се спираме в настоящия курс, но също често се използват при приближаване на определени интеграли.

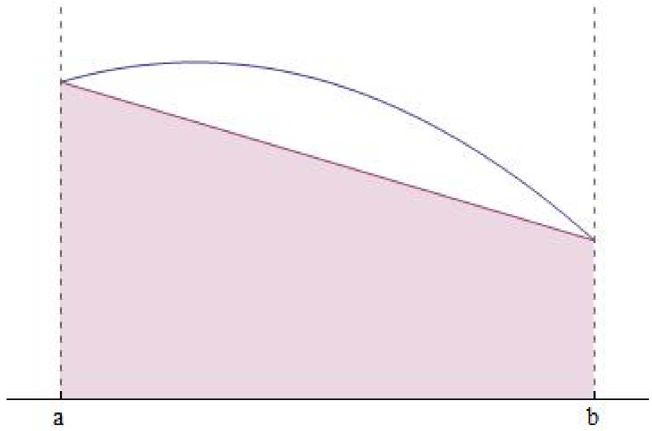
- **Квадратурна формула на трапеците**

Квадратурната формула на трапеците се получава като подинтегралната функция се приближи с интерполационен полином от първа степен ($n = 1$), построен за възли $x_0 = a, x_1 = b$. При нея получаваме формулата за приближение

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

с грешка при апроксимация

$$R(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3, \xi \in (a,b).$$



- **Квадратурна формула на Симпсън**

  Квадратурната формула на Симпсън се получава, като вземем $n = 2$ и изберем $x_0 = a,\ x_1 = \dfrac{a+b}{2},\ x_2 = b$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right], \quad R(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5, \xi \in (a,b).$$

Извеждане на интерполационните квадратурни формули

Ще изведем квадратурната формула на трапеците, за да покажем как става това. За другите формули нещата стоят по подобен начин. Търсим приближение за

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Както казахме, приближаваме функцията $f(x)$ с интерполационния ѝ полином от степен 1 за възлите $x_0 = a$ и $x_1 = b$ и имаме

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_1(f;x)dx.$$

Нека за получаване на интерполационния полином използваме формулата на Нютон. Заместваме го в горното приближение и интегрираме:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b L_1(f;x)dx \\
&= \int_a^b \left(f(a) + f[a,b](x-a)\right)dx \\
&= f(a)(b-a) + \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\frac{(x-a)^2}{2}\bigg|_a^b \\
&= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)).
\end{aligned}$$

Аналогично могат да се изведат и формулите на правоъгълниците и Симпсън. За получаването на грешката от апроксимацията трябва да интегрираме грешката от приближаването на $f(x)$ с $L_n(f;x)$ (виж лекции).

Задача 1. Да се намери приближено стойността на

$$I = \int_{0.5}^{1.5} x^3 dx$$

и да се даде оценка на грешката (по абсолютна стойност), като се използва формулата на:

а) правоъгълниците;

б) трапеците;

в) Симпсън.

Да се сравни с точната стойност 1.25.

Решение. Да означим $f(x) = x^3$. Във всеки от трите случая първо ще дадем оценка на грешката, а след това и ще намерим съответните приближения на I.

а) За грешката имаме

$$R = \left| \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3 \right| = \left| \frac{6\xi}{24}(1.5-0.5)^3 \right| = \frac{|\xi|}{4} \le \frac{1.5}{4} = 0.375.$$

При оценяването на грешката използвахме, че $\xi \in (0.5, 1.5)$. Използваме формулата за приближение и получаваме

$$I \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 1.f(1) = 1.$$

Действителната грешка е $|1.25 - 1| = 0.25$, което е в съответствие с оценката, която дадохме.

б) За оценка на грешката получаваме

$$R = \left| -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \right| = \left| \frac{6\xi}{12}(1.5-0.5)^3 \right| = \frac{|\xi|}{2} \le \frac{1.5}{2} = 0.75.$$

Заместваме във формулата и получаваме приближението

$$I \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = 1 \cdot \frac{f(0.5)+f(1.5)}{2} = \frac{1}{16} + \frac{27}{16} = \frac{7}{4} = 1.75.$$

Действителната грешка по модул е $|1.25 - 0.75| = 0.5$. Тя отново е по-малка от оценката на грешката, която направихме.

в) За оценката на грешката имаме

$$R = \left| -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5 \right| = \left| \frac{0}{2880}(1.5-0.5)^3 \right| = 0.$$

Последното означава, че квадратурната формула на Симпсън пресмята **точно** интеграла. Остава да пресметнем стойността на интеграла с формулата на Симпсън:

$$I \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] = \frac{1}{6}\left[f(0.5) + 4f(1) + f(1.5)\right] = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{8} + 4 + \frac{27}{8}\right) = 1.25.$$

Наистина грешката от приближение е 0.

□

Изведените дотук формули се наричат още **елементарни квадратурни формули.** Ясно е, че ако интервалът на интегриране е голям, то последните формули са на практика неприложими, тъй като грешката от апроксимация ще бъде голяма. Обикновено, с цел да се постигне по-добра точност, се използват т.нар. **съставни квадратурни формули**. Нека търсим приближение за

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

За да избегнем работата с големи интервали, разделяме интервала $[a, b]$ на n равни подинтервала с дължина $h = \dfrac{b-a}{n}$. Нека вземем точките $\{x_i = a + ih\}_{i=0}^n$. Тогава от адитивността на интеграла следва, че е в сила

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

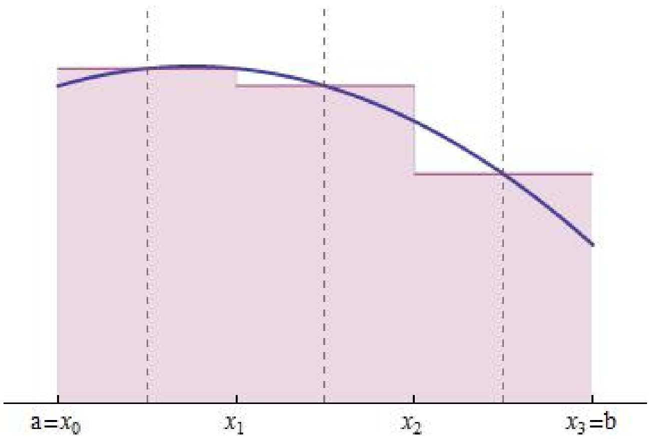
Сега, прилагайки към всеки от подинтервалите $[x_{i-1}, x_i]$ една от квадратурните формули (на правоъгълниците, на трапеците, на Симпсън), получаваме съответно:

- **Съставна квадратурна формула на правоъгълниците**

$$I(f) \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right).$$

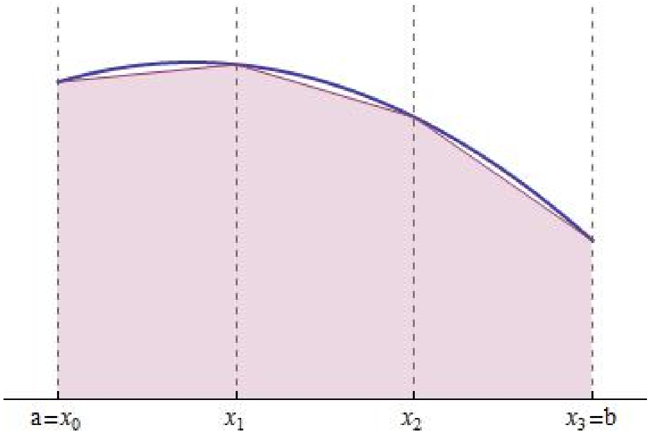
За грешката може да се покаже, че е в сила формулата

$$R(f) = \frac{f''(\xi)}{24n^2}(b-a)^3.$$



- **Съставна квадратурна формула на трапеците**

$$I(f) \approx \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad R(f) = -\frac{f''(\xi)}{12n^2}(b-a)^3.$$



- **Съставна квадратурна формула на Симпсън**

$$I(f) \approx \frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i)\right], \quad R(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880n^4}(b-a)^5.$$

Задача 2. Да се намери n така, че n-тата съставна квадратурна формула на правоъгълниците (трапеците, Симпсън) да приближава

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

с грешка, не по-голяма от $\epsilon = 0.001$. Напишете явно формулата за получаване на възлите в квадратурната формула. Като използвате софтуер за научни изчисления, пресметнете това приближение.

Решение. а) За представянето на грешката по формулата на правоъгълниците имаме

$$R_{rect} = \frac{f''(\xi)}{24n^2}(b-a)^3 = \frac{f''(\xi)}{24n^2}.$$

Диференцираме $f(x)$ и получаваме

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) \quad = \frac{2}{x^3}.$$

$f''(x)$ е намаляваща (и положителна) в интервала $[1, 2]$ и тогава $f''(\xi)$ достига максималната си по модул стойност в този интервал за $\xi = 1$. Тогава

$$|R_{rect}| = \frac{2}{24n^2|\xi|^3} \le \frac{1}{12n^2}.$$

Тъй като искаме грешката да е $\le 10^{-3}$, то налагаме това условие върху оценката на грешката и получаваме

$$\frac{1}{12n^2} \le 10^{-3} \iff n^2 \ge \frac{10^3}{12} \iff n \ge 9.12871.$$

Следователно, за да приближаваме с точност, по-добра от 10^{-3}, n трябва да е поне 10. Обърнете внимание, че това е най-малката стойност на n, която гарантира, че оценката на грешката по модул е ≤ 0.001. Възможно е достатъчно добро приближение да се получи и за по-малки стойности на n.

Сега да намерим самото приближение за I по формулата

$$I(f) \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right).$$

Заместваме и получаваме

$$I(f) \approx \frac{2-1}{10} \sum_{i=1}^{10} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right),$$

където възлите се намират по формулата $x_i = a + ih = a + i\dfrac{b-a}{n} = 1 + 0.1i$.

Последната сума пресмятаме в Mathematica и получаваме $I(f) \approx 0.693771$. Точната стойност на интеграла е $\ln 2 \approx 0.693147$. Грешката между полученото приближение и точната стойност е наистина < 0.001. В сравнение, елементарната квадратурна формула на правоъгълниците връща стойност 0.666667.

б) Приближението по формулата на трапеците можете да направите самостоятелно за упражнение.

в) За представянето на грешката при квадратурната формула на Симпсън имаме

$$R_{simp} = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880n^4}(b-a)^5$$

Пресмятаме четвъртата производна на функцията, заместваме в последната формула и правим оценка отгоре:

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{24}{\xi^5} \Rightarrow |R_{simp}| \leq \frac{24}{2880n^4}.$$

Остава да поискаме оценката на грешката да бъде ≤ 0.001:

$$\frac{24}{2880n^4} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow n \geq 1.69904,$$

т.е. получихме, че n трябва да е поне 2. Да заместим полученото и във формулата на Симпсън

$$I(f) \approx \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i)\right].$$

Имаме

$$I(f) \approx \frac{1}{6*2} \sum_{i=1}^{2} \left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i)\right],$$

където възлите се намират по формулата $x_i = a + ih = 1 + 0.5i$.

Пресмятаме последната сума и получаваме $I(f) \approx 0.693254$, отново с грешка < 0.001. В сравнение, елементарната квадратурна формула на Симпсън връща стойност 0.694444.

$\square$

13.2 Алгебрическа степен на точност. Квадратурна формула на Гаус

Нека сега разгледаме още един важен клас квадратурни формули, които често се използват на практика – т.нар. квадратурни формули на Гаус, като преди това дефинираме две основни понятия, свързани с тях.

Определение 21. Ще казваме, че квадратурната формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k)$$

е точна за функцията f, ако грешката от интегриране $R(f)$ е равна на 0.

Определение 22. Казваме, че една квадратурна формула има **алгебрическа степен на точност** (често ще пишем АСТ) m, ако тя е точна за всички алгебрични полиноми от степен $\leq m$ и съществува полином от степен $m+1$, за който тя не е точна.

За да разберем горната дефиниция, нека припомним грешките за всяка от елементарните квадратурни формули и да видим колко е тяхната алгебрическа степен на точност.

- квадратурна формула на правоъгълниците:

  $$R(f) = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3.$$

  В последната участва втора производна, което означава, че формулата ще бъде точна за полиномите от π_1 (тяхната втора производна е 0 и следователно и грешката от интегриране ще бъде равна на 0).

- квадратурна формула на трапеците:

  $$R = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3.$$

  Аналогично на предходната, тази формула е точна за полиномите от π_1.

- квадратурна формула на Симпсън:

  $$R = -\frac{f^{IV}(\xi)}{2880}(b-a)^5.$$

  Във формулата на Симпсън участва четвърта производна следователно тя е точна $\forall f \in \pi_3$.

Нека сега разгледаме една задача за определяне на АСТ, като използваме отново метода на неопределените коефициенти.

Задача 3. Да се определят коефициентите a, b, c така, че квадратурната формула

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx c\,(f(ah) + f(bh))$$

да има максимална АСТ.

Решение. Искаме квадратурната формула да бъде точна за полиномите от възможно най-висока степен. Това е същото като квадратурната формула да бъде точна за съответните им базисни полиноми $1, x, x^2, x^3, \ldots$ Тъй като искаме да определим трите параметъра a, b, c, то ще наложим три условия – квадратурната формула да бъде точна за $1, x, x^2$, т.е. разликата (грешката) между лявата и дясната страна за тях да е равна на 0. Замествайки $f(x)$ последователно с функциите $1, x, x^2$, получаваме системата:

$$\left|\begin{array}{l} \int_{-h}^{h} 1dx - c(1+1) = 0 \\ \int_{-h}^{h} xdx - c(ah+bh) = 0 \\ \int_{-h}^{h} x^2dx - c((ah)^2+(bh)^2) = 0 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|\begin{array}{l} 2h - 2c = 0 \\ 0 - ch(a+b) = 0 \\ \frac{2h^3}{3} - ch^2(a^2+b^2) = 0 \end{array}\right. .$$

Решение на системата е наредената тройка $a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $c = h$. Заместваме получените коефициенти във формулата по-горе и получаваме квадратурната формула

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx h\left(f\left(-\frac{h}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)\right). \tag{13.1}$$

Нека определим и нейната АСТ. Очевидно тя е точна за полиномите от π_2, тъй като е точна за базисните полиноми $1, x, x^2$. Да проверим дали точна и за x^3. Да заместим $f(x) = x^3$ в лявата и дясната страна на (13.1) и да видим дали двете страни имат равни стойности"

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \int_{-h}^{h} x^3dx = 0$$
$$h\left(f\left(-\frac{h}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)\right) = h\left(\left(-\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^3\right) = 0.$$

Следователно формулата е точна за полиномите от π_3. Лесно се вижда, че формулата не е точна за x^4 (проверете сами) и следователно квадратурната формула (13.1) има АСТ равна на 3. □

АСТ е критерий за това колко е точна дадена квадратурна формула. Може да се покаже, че ако формулата има АСТ n, то грешката от апроксимация е $O((b-a)^n)$, където $[a, b]$ е интервалът на интегриране.

Разглеждаме квадратурната формула в общия вид

$$\int_{a}^{b} \mu(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \tag{13.2}$$

където $\mu(x)$ е дадено тегло, дефинирано в $[a, b]$, точките $\{x_k\}_{k=1}^n$ $(a \le x_1 < \cdots < x_n \le b)$ са възлите на квадратурната формула, а $\{A_k\}_{k=1}^n$ са реални числа – коефициентите на квадратурната формула. Искаме да определим възлите и коефициентите така, че съответната квадратурна формула да има възможно най-висока АСТ. Тази формула се нарича **квадратурна формула на Гаус**. Построяването ѝ се основава на следното твърдение.

Твърдение 3. При всяко естествено число n съществува единствена квадратурна формула от вида (13.2) с АСТ $2n-1$ (и нито една с по-голяма АСТ). Възлите $\{x_k\}_{k=1}^n$ на тази квадратурна формула са нулите на полинома от степен n, ортогонален в $[a,b]$ с тегло $\mu(x)$ на всички алгебрични полиноми от степен $n-1$.
Забележка: Да обърнем внимание, че максималната АСТ за квадратурна формула с n възела е равна на $2n-1$, което е пряко свързано с факта, че има $2n$ на брой неизвестни коефициента.

Ще покажем как можем да изведем формулите при тегло $\mu(x)=1$ по метода на неопределените коефициенти в $[-1,1]$. С други думи, ще изведем формули за приближеното пресмятане на

$$I(f)=\int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

Тези формули са известни като формули на Гаус-Льожандър и се ползват често на практика за приближаване на интеграли.

Задача 4. Да се намери по метода на неопределените коефициенти формулата на Гаус-Льожандър с два възела (т.е. в интервала $[-1,1]$ и тегло $\mu(x)=1$).

Решение. Търсим приближението във вида

$$I\approx A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2).$$

Неизвестните параметри, които трябва да се определят, са A_1, A_2, x_1, x_2. Съгласно Твърдение 3, формулата трябва да има АСТ 3, т.е. да е точна за всички полиноми от π_3. Ще вземем най-простия базис $\{1, x, x^2, x^3\}$ и получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-1}^{1} 1dx = A_1.1 + A_2.1\\ \displaystyle\int_{-1}^{1} xdx = A_1.x_1 + A_2.x_2\\ \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2dx = A_1.x_1^2 + A_2.x_2^2\\ \displaystyle\int_{-1}^{1} x^3dx = A_1.x_1^3 + A_2.x_2^3\end{array}\right.$$

Решаваме тази система с *Mathematica*, вземайки предвид, че $x_1 < x_2$:

```
In[5]:= Solve[
          {A1 + A2 == Integrate[1, {x, -1, 1}],
           A1 x1 + A2 x2 == Integrate[x, {x, -1, 1}],
           A1 x1^2 + A2 x2^2 == Integrate[x^2, {x, -1, 1}],
           A1 x1^3 + A2 x2^3 == Integrate[x^3, {x, -1, 1}],
           x1 < x2
          }, {A1, A2, x1, x2}]
```

Out[5]= $\left\{\left\{A_1\to 1,\ A_2\to 1,\ x_1\to -\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2\to \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$

Така, търсената формула има вида

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Получихме формулата от задача 3 при $h=1$. □

Аналогично могат да се изведат и формули с повече възли. Ще дадем някои формули в следната таблица, като дадем възлите и коефициентите за всяка от тях.

Брой възли	Коефициенти	Възли	АСТ
1	$A_1 = 2$	$x_1 = 0$	1
2	$A_1 = 1$	$x_1 = -1/\sqrt{3}$	3
	$A_2 = 1$	$x_2 = 1/\sqrt{3}$	
3	$A_1 = 5/9$	$x_1 = -\sqrt{3/5}$	5
	$A_2 = 8/9$	$x_2 = 0$	
	$A_3 = 5/9$	$x_3 = \sqrt{3/5}$	
4	$A_1 = (18 - \sqrt{30})/36$	$x_1 = -\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}/35$	7
	$A_2 = (18 + \sqrt{30})/36$	$x_2 = -\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}/35$	
	$A_3 = (18 + \sqrt{30})/36$	$x_3 = \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}/35$	
	$A_4 = (18 - \sqrt{30})/36$	$x_4 = \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}/35$	

Квадратурните формули на Гаус-Льожандър лесно се прилагат върху произволен интеграл в граници от a до b, като се направи линейна смяна, за която $[a, b] \to [-1, 1]$. За да намерим приближено стойността на

$$\int_a^b f(x)dx,$$

първо трябва да направим **смяна на променливата**:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t.$$

Допълнителни задачи

Задача 5. Като използвате квадратурната формула на правоъгълниците/на трапеците/на Симпсън, пресметнете приближено стойността на

$$\int_{-1}^1 (x^3 + 1)dx.$$

Дайте оценка на грешката.

Задача 6. Напишете съставна квадратурна формула на трапеците/правоъгълниците, осигуряваща пресмятане на $\displaystyle\int_0^1 \sin x \; dx$ с грешка, по-малка от 0.01. Обосновете се, като използвате формулата за оценка на грешката. Напишете явно формулата, по която се получават възлите на квадратурната формула.

Задача 7. Напишете съставна квадратурна формула на Симпсън, осигуряваща пресмятане на $\displaystyle\int_0^1 \sin x \; dx$ с грешка, по-малка от 0.001. Обосновете се, като използвате формулата за оценка на грешката. Напишете явно формулата, по която се получават възлите на квадратурната формула.

Задача 8. Напишете съставна квадратурна формула на трапеците/правоъгълниците, осигуряваща пресмятане на $\displaystyle\int_0^1 x^2 \; dx$ с грешка, по-малка от 0.01. Обосновете се, като използвате формулата за оценка на грешката. Напишете явно формулата, по която се получават възлите на квадратурната формула. Какво можете да кажете за оценката при използване на съставната квадратурна формула на Симпсън?

Задача 9. Напишете съставна квадратурна формула на трапеците/правоъгълниците, осигуряваща пресмятане на $\displaystyle\int_0^2 e^x \; dx$ с грешка, не по-голяма от $\epsilon = 10^{-3}$. Обосновете се, като използвате формулата за оценка на грешката. Напишете явно формулата, по която се получават възлите на квадратурната формула.

Глава 14

Числено решаване на нелинейни уравнения

Нека сега разгледаме въпроса за намиране на приближено решение на дадено уравнение $f(x) = 0$, където $f(x)$ е дадена функция. Както знаем, дори за „най-простите” алгебрични уравнения не съществува обща формула за намиране на решенията на уравнения, когато степента е ≥ 5.

Често е трудно да се определи съществуването и единствеността на корен на дадено уравнение, особено когато то е нелинейно. Последните могат да имат различно поведение в околност на нулата; алгебричните и трансцедентните уравнения могат да имат различни или повтарящи се реални корени, както и комплексни. Въпреки че е трудно да се направят някакви заключения за съществуването и броя на корените на дадено уравнение, съществуват локални критерии, по които да се определи съществуването на такова решение. В общия случай на практика най-често използваният метод за отделяне на корена следва от познатата ни теорема за междинните стойности.

Теорема 24 (Теорема за междинните стойности)**.** Нека $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$. Тогава за всяко $M \in \mathbb{R}$, за което $f(a) \leq M \leq f(b)$, съществува $\xi \in [a, b]$, такова че $f(\xi) = M$.

Последната теорема можем да използваме, за да локализираме корена на нашето уравнение: ако определим интервал $[a, b]$ така, че $f(a)f(b) < 0$, то $\exists$ т. $\xi \in [a, b] : f(\xi) = 0$. Разбира се, интервал, в който лежи коренът на уравнението, може да се определи и като се начертае графиката на $f(x)$.

След като вече сме отделили корена, следва да го уточним. Голяма част от методите за намиране на корените на нелинейни уравнения са итерационни. При тях се избира подходящо начално приближение x_0 и по някаква формула се построява редица от приближения

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots,$$

която клони към точното решение ξ. Разбира се, когато търсим корен на дадено уравнение, ние ще избираме предварително зададена точност ϵ на приближение (например точност 10^{-3} и т.н.).

Тук ще се спрем на два класа итерационни методи и ще дадем пример за всеки от тях:

1. **Методи, заграждащи корена (англ. *bracketing domain methods*)**

   Тези методи използват, че коренът е разположен в предварително определения интервал $[a, b]$ и постепенно намаляват дължината на интервала, като държат корена затворен в него. Заради ограничаването на корена, при тези методи **има сходимост към точното решение**, но могат да са относително бавни. Два такива метода са:

- метод на **разполовяването** или метод на **бисекцията** (англ. *bisection method*);
- метод на **хордите** (англ. *false position/regula falsi*).

2. **Отворени методи (*open domain methods*)**

   За разлика от предишните методи, при отворените методи не винаги се достига сходимост. Те не се стремят да ограничават корена от двете страни, а се опитват да строят редица, която да се доближава към него от едната страна. Последните обаче използват информацията за нелинейната функция, за да оценят корена, и по тази причина те се смятат за по-ефикасни. Примери за отворени методи са:

   - метод на **секущите** (англ. *secant method*);
   - метод на **Нютон** (англ. *Newton's method/Newton-Raphson's method*).

И така, нека сега разгледаме поотделно всеки от методите.

14.1 Метод на бисекцията

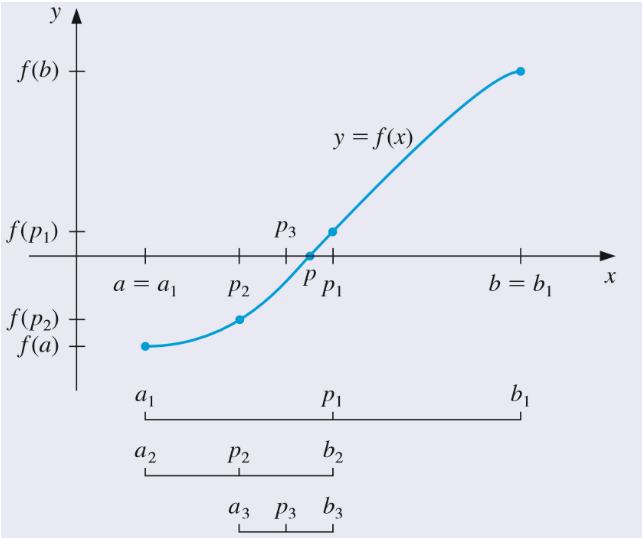
Идеята на метода е следната:

1. Нека сме ограничили корена на уравнението в даден интервал $[a, b]$ и за него имаме $f(a).f(b) < 0$.

2. Пресмятаме стойността на функцията $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

   - Ако $f(a).f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$, това означава, че функцията има различни знаци в точките a и $\dfrac{a+b}{2}$ и коренът се намира в интервала, определен от тези две точки. Вземаме $b := \dfrac{a+b}{2}$ и търсим корена в така получения (два пъти по-малък) интервал $[a, b]$.
   - В противен случай вземаме $a := \dfrac{a+b}{2}$.

3. Повтаряме тези стъпки, докато интервалът, в който е заключен коренът, стане с дължина, по-малка от предварително избран толеранс ϵ. След като сме достигнали желаната дължина на интервала, можем да изберем за приближено решение всяка точка от него. Обикновено за приближението се избира $(a + b)/2$.



Фигура 14.1: Графично представяне на метода на бисекцията.

Задача 1. Като се използва методът на бисекцията, да се намери приближено решение на уравнението

$$x^3 + 2x - 2 = 0$$

с точност 0.1.

Решение. Нека първо локализираме корена. Лесно се вижда, че от

$$f(0) = -2, \;\; f(1) = 1$$

следва, че коренът лежи в интервала $[0, 1]$. Ще приложим метода на бисекцията, докато интервалът ни стане с дължина, по-малка от 10^{-1}.

- Намираме средата на интервала $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{0+1}{2} = 0.5$. Тъй като $f(0.5) = -0.875$, то избираме $a := 0.5$;
- Разглеждаме интервала $[0.5, 1]$. Имаме

  $$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(0.75) = -0.078125.$$

  Избираме $a := 0.75$.
- Разглеждаме интервала $[0.75, 1]$. Имаме

  $$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(0.875) = 0.419922.$$

  Избираме $b := 0.875$.
- Разглеждаме интервала $[0.75, 0.875]$. Имаме

  $$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(0.8125) = 0.161377.$$

  Избираме $b := 0.161377$.

- Разглеждаме интервала $[0.75, 0.8125]$. Последният има дължина $\epsilon = 0.0625$. Следователно търсеният корен е
$$\xi \approx \frac{0.75 + 0.8125}{2} = 0.78875.$$
Да обърнем внимание, че можехме да приближим последния корен и като изберем всяко число от последния интервал с дължина под 0.1, т.е. $[0.75, 0.8125]$.

Подробно решение може да намерите и тук How to locate a root? The bisection method. □

Да обърнем внимание, че методът на бисекцията е бавно сходящ, т.е. сходимостта му към достатъчно добро приближение в общия случай изисква много на брой итерации.

14.2 Метод на свиващите изображения

Останалите методи, които посочихме по-горе, се базират на така наречения **метод на свиващите изображения**.

Нека $f(x)$ е функция, определена в $[a, b]$. Всяко уравнение от вида
$$f(x) = 0$$
може да бъде записано в еквивалентния вид $x = \varphi(x)$ (като например прибавим x в двете страни на уравнението и положим $\varphi(x) := x + f(x)$). Да обърнем внимание, че от $f(\xi) = 0$ следва, че е в сила $\xi = \varphi(\xi)$. Такава точка ξ, ще наричаме **неподвижна точка** за изображението φ.

И така, при метода на свиващите изображения се построява итерационен процес по формулата
$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \tag{14.1}$$
така, че редицата
$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$$
да клони към точното решение ξ на уравнението $f(x) = 0$ при $n \to \infty$. В този случай ще казваме, че **итерационният процес е сходящ**. Ясно е, че не за всеки избор на функцията $\varphi(x)$ итерационният процес ще бъде сходящ. Съществува обаче клас от функции φ, за които това е изпълнено **при подходящ избор на начално приближение/достатъчно добро начално приближение $\mathbf{x_0}$**. И така, сега ще наложим условия за φ, при които така разглежданият итерационен процес е сходящ.

Първо, ясно е, че ако φ е определено в $[a, b]$, то редицата не бива да „напуска” този интервал. Иначе (ако някое приближение $x_n \notin [a, b]$) няма да можем да продължим пресмятанията по формулата (14.1). В тази връзка е очевидно следното твърдение.

Твърдение 4. Ако $\varphi(x)$ е изображение на $[a, b]$ в себе си (т.е. $\varphi(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$), то **при произволно начално приближение $\mathbf{x_0}$** от $[a, b]$, всички останали точки от редицата $\{x_n\}$, построена по (14.1), принадлежат също на $[a, b]$.

Оказва се, че ако добавим изискването за непрекъснатост към φ, то това гарантира наличието на корен на уравнението в интервала.

Твърдение 5. Ако φ е непрекъснато изображение на интервала $[a, b]$ в себе си, то φ има неподвижна точка в $[a, b]$.

И така, остава да видим кои са тези непрекъснати изображения на интервала $[a, b]$ в себе си, които при това ще гарантират, че итерационният процес (14.1) ще бъде сходящ.

Определение 23. Казваме, че функцията φ удовлетворява условието на Липшиц (е Липшицова) с константа q, $q > 0$, в $[a, b]$, ако

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|, \ \forall x, y \in [a, b].$$

Определение 24. Изображение φ, което удовлетворява условието на Липшиц с константа $q < 1$, наричаме **свиващо изображение**.

Оказва се, че именно свиващите изображения гарантират сходимостта на итерационния процес. В сила е следната теорема.

Теорема 25. Нека φ е непрекъснато изображение на $[a, b]$ в себе си, което удовлетворява условието на Липшиц с константа $q < 1$. Тогава

(а) уравнението $x = \varphi(x)$ има **единствен корен** ξ в $[a, b]$;

(б) редицата $\{x_n\}$ клони към ξ при $n \to \infty$ **за всяко начално приближение** $\mathbf{x_0} \in [a, b]$;

(в) в сила е **оценката за сходимостта** на приближеното към точното решение

$$|x_n - \xi| \leq q^n(b - a).$$

Нека да обърнем внимание на следното. Това, че процесът е сходящ, означава, че всяко следващо приближение x_{n+1} е по-близо до корена ξ от предишното, x_n. Това, разбира се, е естествено, ако φ е свиващо изображение. Разстоянието между x_n и ξ трябва да е по-голямо от разстоянието между $\varphi(x_n)$ и $\varphi(\xi)$, т.е. между следващото намерено приближение x_{n+1} и ξ:

$$|\varphi(x_n) - \varphi(\xi)| \leq q|x_n - \xi| \Leftrightarrow |x_{n+1} - \xi| \leq q|x_n - \xi|.$$

Нещо повече, разстоянието на всяка итерация се скъсява поне q пъти, т.е. след n итерации ще се скъси поне q^n пъти.

Да се докаже, че една функция е Липшицова с константа $q < 1$ обаче съвсем не е тривиално. Често е най-удобно да се провери, че φ е свиващо изображение, като се използва следното достатъчно условие, което е непосредствено следствие от теоремата за крайните нараствания.

Твърдение 6. Достатъчно условие функцията φ да е свиващо изображение е $\varphi \in C^1[a, b]$ и $|\varphi'(x)| < 1$ за всяко $x \in [a, b]$.

Да обобщим

Нека сме локализирали корена на уравнението $f(x) = 0$ в $[a, b]$. За да използваме метода на свиващите изображения, трябва да преобразуваме уравнението $f(x) = 0$ до $x = \varphi(x)$ така, че:

- φ да е непрекъснато изображение на $[a, b]$ в себе си;
- да е в сила достатъчното условие φ да бъде свиващо, т.е. $|\varphi'(x)| \leq q < 1$;
- ако искаме да определим приближение x_n с точност ϵ, използваме оценката
$$|x_n - \xi| \leq q^n(b - a)$$
и избираме това n, за което $q^n(b - a) \leq \epsilon$;
- редицата от приближения строим, като изберем начално приближение x_0 от интервала $[a, b]$ и използваме формулата $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

Да илюстрираме казаното със следващия пример.

Задача 2. Направете две итерации по метода на свиващите изображения с начално приближение $x_0 = 0$ за приближено решаване на уравнението $x^3 - 7x + 2 = 0$ в интервала $[0, 1]$. Като използвате оценката на грешката, определете за кое n се достига точност 10^{-1}.

Решение.

- Искаме да запишем уравнението във вида $x = \varphi(x)$ така, че φ да бъде непрекъснато изображение на $[0, 1]$ в себе си и да е свиващо. Записваме в еквивалентния вид
$$x = \frac{1}{7}\left(x^3 + 2\right), \text{ т.е. } \varphi(x) = \frac{1}{7}\left(x^3 + 2\right).$$
Последната функция е растяща в интервала $[0, 1]$ и освен това $\varphi(0) = \frac{2}{7}$, $\varphi(1) = \frac{3}{7}$, откъдето следва, че φ е изображение на $[0, 1]$ в себе си. Нека проверим дали изображението $\varphi(x)$ е свиващо. За неговата производна имаме
$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{3x^2}{7}\right| \leq \frac{3}{7} =: q < 1.$$
И така, показахме, че $\varphi(x)$ действително е свиващо изображение. За оценката на грешката имаме
$$|x_n - \xi| \leq \left(\frac{3}{7}\right)^n (b - a) = \left(\frac{3}{7}\right)^n.$$
- Да направим две итерации по метода. Имаме формулата $x_{n+1} = \varphi(x_n)$:
$$x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(0) = 2/7, \qquad x_2 = \varphi(x_1) = 694/2401 \approx 0.289046.$$
- Да определим числото n, за което имаме точност 10^{-1}, т.е. за което е в сила оценката
$$\left(\frac{3}{7}\right)^n \leq 10^{-1}.$$
Ще проверим последното условие за $n = 1, 2, \ldots$:

- $n = 1$: $3/7 \approx 0.428571$;
- $n = 2$: $(3/7)^2 \approx 0.183673$;
- $n = 3$: $(3/7)^3 \approx 0.0787172 < 0.1$.

От оценката на грешката получихме, че за $n = 3$ ще сме достигнали желаната точност.

$\square$

Нека сега разгледаме един пример, който показва, че определянето на φ така, че да бъде свиващо изображение, може да се окаже доста трудоемко.

Задача 3. Да се намери приближено положителният корен на уравнението $x^2 - 2 = 0$ с точност 10^{-2}.

Решение.
Метод на свиващите изображения
Ясно е, че корените на уравнението са $\pm\sqrt{2}$, т.е. търсим приближение на числото $\sqrt{2} \approx 1.41421$. Тъй като $f(1)f(2) < 0$, ще търсим решението на уравнението в интервала $[1, 2]$. Искаме да запишем уравнението във вида $x = \varphi(x)$ така, че то да бъде свиващо изображение и да изобразява $[1, 2]$ в себе си. Да разгледаме два избора за φ :

<u>Опит 1</u> Да прибавим x от двете страни на уравнението. Получаваме:

$$x = x^2 - 2 + x, \quad \text{т.е. } \varphi(x) = x^2 + x - 2.$$

Лесно се проверява, че, така дефинирано, φ не е изображение на $[1, 2]$ в себе си.

<u>Опит 2</u> Разглеждаме еквивалентното уравнение:

$$x = \frac{2}{x}, \quad \text{т.е. } \varphi(x) = \frac{2}{x}.$$

Функцията φ е намаляваща в интервала и освен това $\varphi(1) = \dfrac{2}{1} = 2$ и $\varphi(2) = \dfrac{2}{2} = 1$, откъдето следва, че φ е непрекъснато изображение на $[1, 2]$ в $[1, 2]$. От друга страна, в интервала $[1, 2]$ имаме

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow |\varphi'(1)| = 2 \not< 1$$

и следователно достатъчното условие за свиващо изображение не е изпълнено.

Изглежда, че няма очевиден начин, по който дясната страна да е свиващо изображение. $\square$

14.3 Методи на хордите, допирателните (метод на Нютон) и секущите

Както вече казахме, намирането на функция, която да удовлетворява условията в теорема 25, може да бъде твърде трудоемко. Нека сега разгледаме три други метода, които често се ползват на практика за решаването на нелинейни уравнения.

Нека е дадена функцията $f(x)$, която е два пъти диференцируема в интервала $[a, b]$ и изпълнява следните условия:

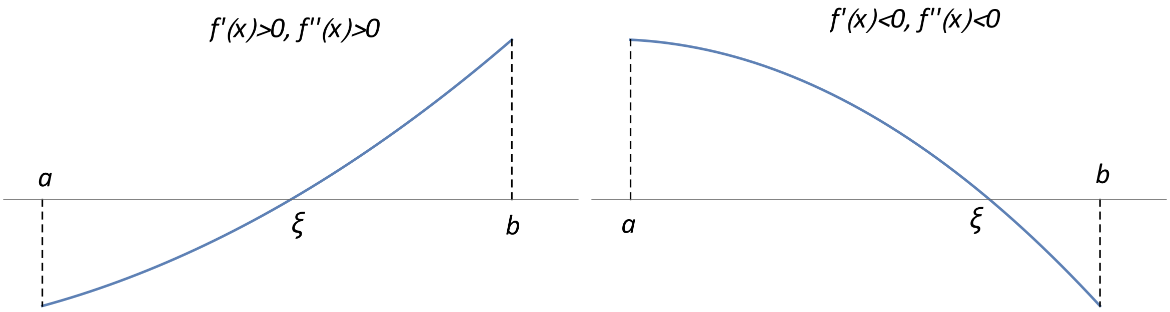
- $f(a)f(b) < 0$ (гарантира съществуването на корен в интервала $[a, b]$);

- $f'(x)$ и $f''(x)$ не си сменят знака в интервала $[a, b]$. Това гарантира единствеността на корена и се изисква заради сходимостта на методите, които ще разгледаме.

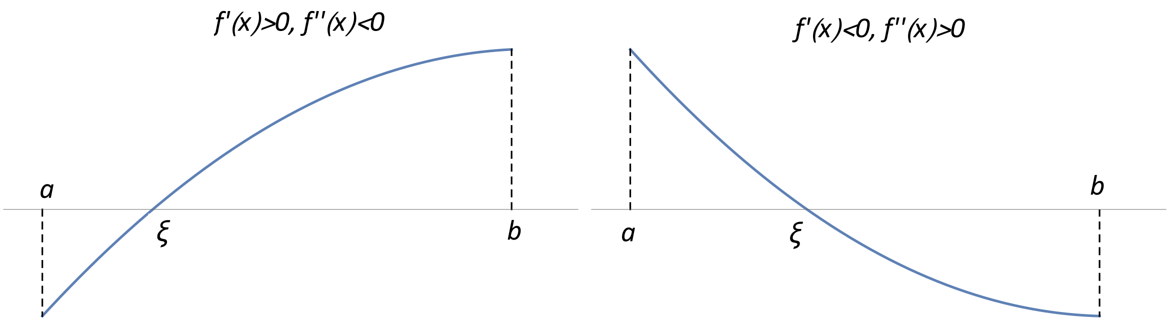
На пръв поглед изглежда, че горните условия силно ограничават приложимостта на методите. Ако обаче разгледаме една функция в близост до нейния корен, ще се уверим, че тя изпълнява горните условия освен в някои изродени случаи.

И така, ще считаме, че се намираме в един от следните случаи:

- $f(a)f''(a) < 0$. Възможностите това да е изпълнено са:



- $f(b)f''(b) < 0$. Възможностите това да е изпълнено са:



За определеност ще разгледаме методите в случая, когато $f(a)f''(a) < 0$ или, което е еквивалентно, $f(x)$ е изпъкнала и растяща/вдлъбната и намаляваща, т.е. е в сила условието $f'(x) > 0, f''(x) > 0 / f'(x) < 0, f''(x) < 0, \forall x \in [a, b]$.

14.3.1 Метод на хордите

Един сериозен недостатък на метода на бисекцията е, че той не взима предвид стойността на функцията $f(x)$ в двата края на интервала, а се интересува само от нейния знак. Например, ако $f(b)$ е по-близо до 0, отколкото $f(a)$, то вероятно коренът е по-близо до b, отколкото до a. Алтернативен начин да се загради коренът е, като се построи права през точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ и се разгледа решението в новия интервал, който се определя от пресечната точка на хордата с абсцисата и един от краищата, избран така, че функцията да си сменя знака в интервала. Методът на хордите построява редица от приближения, като всеки пореден член от редицата се получава като пресечна точка на получената хорда с Ox. По същество, вместо да решаваме уравнението $f(x) = 0$, решаваме $L_1(f; x) = 0$, където L_1 е полиномът на Лагранж, интерполиращ функцията в точките $(a, f(a))$ и $(x_n, f(x_n))$ или $(b, f(b))$ и $(x_n, f(x_n))$.

По-точно казано, по метода на хордите се строи редицата $x_0, x_1, \ldots$ по следния начин (в случая, когато $f(a)f''(a) < 0$):

1. избираме начално приближение $x_0 := a$;

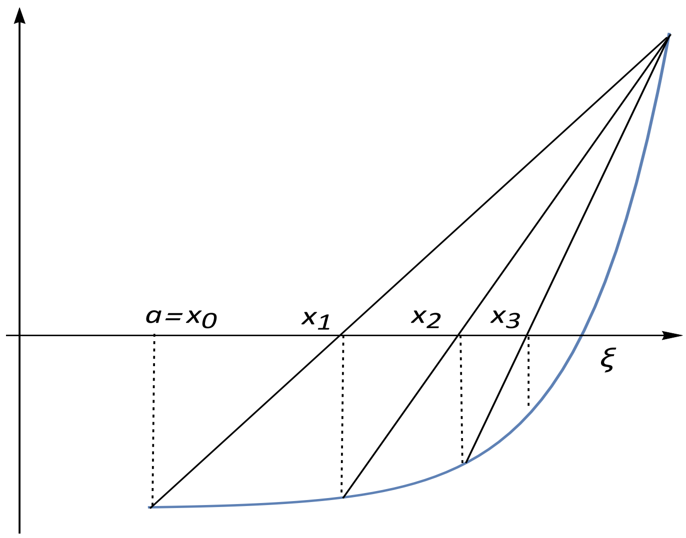
2. x_{n+1} се намира като пресечна точка на хордата през т. $(x_n, f(x_n))$ и десния край на кривата $(b, f(b))$. За да определим тази точка, нека намерим уравнението на интерполационния полином през двете точки. От формулата на Нютон имаме:

$$L_1(f;x) = f(x_n) + f[x_n, b](x - x_n).$$

   Намираме пресечната му точка с Ox, т.е. решаваме уравнението $L_1(f;x) = 0$ и така полученото решение полагаме да е следващото ни приближение. И така, всяко следващо приближение се получава по формулата:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n).$$

Илюстрация на метода е дадена на картинката по-долу.



Забележка: Ако за функцията е изпълнено $f(b)f''(b) < 0$ (еквивалентно $f(a)f''(a) > 0$) се използва следната формула:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

за $x_0 := b$.

Оценка на грешката

За метода на хордите може да се покаже, че са в сила следните оценки на грешката:

$$(\text{а})|x_n - \xi| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_n - x_{n-1}|, \quad (\text{б})|x_n - \xi| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1},$$

където $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, $M_1 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.
Да отбележим, че тези оценки са **апостериорни**. Апостериорните оценки използват резултата от пресмятанията в метода (например x_n). За разлика от тях при **априорните** оценки всичката информация е налична „априори", т.е. преди да започнем пресмятанията. Такава например е оценката

$$|x_n - \xi| \le q^n(b-a).$$

Впрочем лесно се проверява, че оценката

$$|x_n - \xi| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \quad m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|,$$

е валидна, независимо от метода. От теоремата за крайните нараствания имаме

$$|f(x_n) - f(\xi)| = |f'(\eta)||x_n - \xi| \Rightarrow |x_n - \xi| = \frac{|f(x_n) - f(\xi)|}{|f'(\eta)|} \overset{f(\xi)=0}{=} \frac{|f(x_n)|}{|f'(\eta)|} \le \frac{|f(x_n)|}{m_1}, m_1 = \min_{\eta\in[a,b]} |f'(\eta)|.$$

За нашите пресмятания ние ще използваме именно нея.

Да обобщим

Нека сме локализирали корена на уравнението $f(x) = 0$ в $[a,b]$ и функциите $f'(x), f''(x)$ не си сменят знака в интервала $[a,b]$ (т.е. функцията f е монотонна и е или изпъкнала, или вдлъбната в интервала). По метода на хордите се строи редицата $x_0, x_1, \dots$ по следния начин:

- Ако $f(a)f''(a) < 0$, то строим редица от приближения по формулата

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n)$$

  за начално приближение $x_0 = a$;

- Ако $f(b)f''(b) < 0$, то строим редица от приближения по формулата

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a)$$

  за начално приближение $x_0 = b$;

- Ако искаме да определим x_n с точност ϵ, използваме една от следните оценки:

$$(\text{а})|x_n - \xi| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_n - x_{n-1}|, \quad (\text{б})|x_n - \xi| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1},$$

  където $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, $M_1 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Решение на задача 3 по метода на хордите.
Разглеждаме уравнението
$$x^2 - 2 = 0$$
и търсим приближение в интервала $[1, 2]$ с точност 10^{-2}. За целта при всяко намерено приближение ще използваме оценката
$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$

Да изберем начално приближение. В интервала $[1, 2]$ функцията е растяща и изпъкнала или още $f(1)f''(1) = -2 < 0$. Избираме начално приближение $x_0 = 1$.

- $\underline{n = 1}$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}(b - x_0),$$
$$x_1 = 1 - \frac{-1}{2+1}(2-1) = \frac{4}{3}.$$

  Имаме оценка
$$|x_1 - \xi| \leq \frac{|f(x_1)|}{m_1} = \frac{|-2/9|}{2} = 1/9.$$

  В последното използвахме, че $m_1 = \min\limits_{x \in [1,2]} |f'(x)| = |f'(1)| = 2$.

- $\underline{n = 2}$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_1),$$
$$x_2 = 4/3 - \frac{-2/9}{2 + 2/9}(2 - 4/3) = 7/5 = 1.4.$$

  Имаме оценка
$$|x_2 - \xi| \leq \frac{|f(x_2)|}{m_1} = \frac{|-1/25|}{2} = 0.02.$$

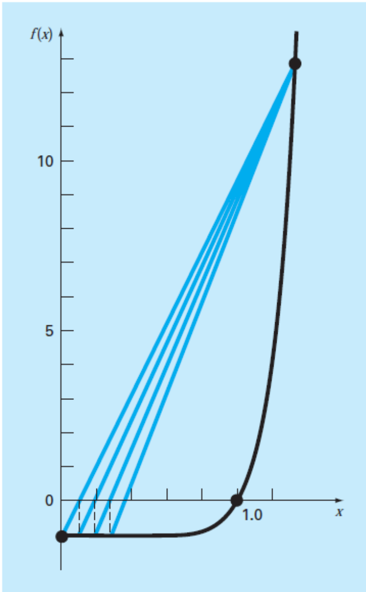
- $\underline{n = 3}$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(b) - f(x_2)}(b - x_2),$$
$$x_3 = 7/5 - \frac{-1/25}{2 + 1/25}(2 - 7/5) = 24/17 = 1.41176.$$

  Имаме оценка
$$|x_3 - \xi| \leq \frac{|f(x_3)|}{m_1} = \frac{|-2/285|}{2} = 1/285 \approx 0.00346021 < 0.01.$$

Следователно търсеното приближение е $24/17$. Както знаем, точното решение на уравнението е $\sqrt{2} \approx 1.4142$. □

Да обърнем внимание, че методът на хордите загражда корена между единия край на интервала $[a, b]$ и приближението на текущата итерация x_n. Това означава, че при него винаги имаме сходимост. Въпреки това, както метода на бисекцията, той може да бъде относително бавно сходящ (вж. фигурата по-долу).



Фигура 14.2: Графика на функцията $f(x) = x^{10} - 1$, илюстрираща бавната сходимост на метода на хордите.

14.3.2 Метод на Нютон (метод на допирателните)

Методът на Нютон се базира на следната идея. Искаме да решим приближено уравнението $f(x) = 0$. Нека сме избрали начално приближение x_0, което е достатъчно близко до корена (в нашия случай отново ще избираме x_0 измежду двата края на интервала, в зависимост от изпъкналостта на функцията). Искаме да определим следващо приближение x_1 по следния начин. Вместо да решаваме уравнението $f(x) = 0$, взимаме линеаризацията на последната функция в точката x_0, т.е. решаваме полученото приближение

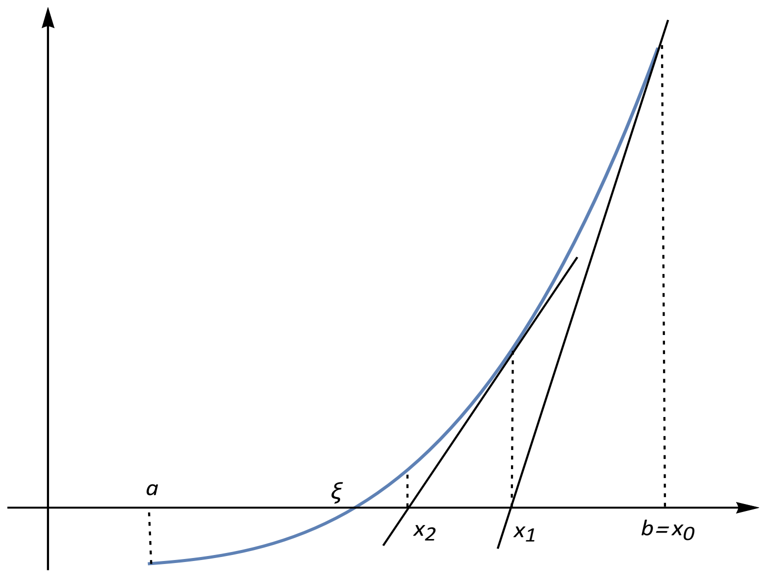
$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0.$$

Решението на последното уравнение ще бъде следващото приближение в нашата редица, т.е.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Постъпваме аналогично за останалите членове на редицата, т.е. е в сила следната формула:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{14.2}$$



От графиката се вижда, че от така разглежданите условия за f, т.е. в случая $f(a)f''(a) < 0$, следва, че за начално приближение трябва да изберем $x_0 := b$.

Оценка на грешката

Може да се покаже, че за метода на Нютон са в сила следните оценки на грешката:

$$\text{(а) } |x_n - \xi| \le \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2, \quad \text{(б) } |x_n - \xi| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1},$$

където $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Да обобщим

Нека сме локализирали корена на уравнението $f(x) = 0$ в $[a, b]$ и функциите $f'(x), f''(x)$ не си сменят знака в интервала $[a, b]$ (т.е. функцията f е монотонна и е или изпъкнала, или вдлъбната в интервала). По метода на Нютон се строи редицата $x_0, x_1, \dots$ по формулата

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

като:

- Ако $f(a)f''(a) < 0$, то избираме за начално приближение $x_0 = b$;
- Ако $f(b)f''(b) < 0$, то избираме за начално приближение $x_0 = a$;
- Ако искаме да определим x_n с точност ϵ, използваме една от следните оценки:

$$\text{(а)} |x_n - \xi| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_n - x_{n-1}|, \quad \text{(б)} |x_n - \xi| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1},$$

  където $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, $M_1 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Решение на задача 3 по метода на Нютон.
Разглеждаме уравнението
$$x^2 - 2 = 0$$
и търсим приближение в интервала $[1,2]$ с точност 10^{-2}. За целта при всяко намерено приближение ще използваме оценката
$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$
Тъй като $f(1)f''(1) = -2 < 0$, избираме за начално приближение десния край, т.е. $x_0 = 2$.

- $n = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$
$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{2}{4} = \frac{3}{2}.$$

Имаме оценка
$$|x_1 - \xi| \leq \frac{|f(x_1)|}{m_1} = \frac{|1/4|}{2} = 1/8 = 0.125.$$

- $n = 2$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$
$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1/4}{3} = \frac{17}{12} \approx 1.41667.$$

Имаме оценка
$$|x_2 - \xi| \leq \frac{|f(x_2)|}{m_1} = \frac{|1/144|}{2} = 1/288 = 0.00347222 < 0.01.$$

Търсеното приближение е $17/12$.

Да обърнем внимание, че в тази конкретна задача можем да изберем началното условие да бъде левият край и пак да достигнем до сходимост. В тази постановка обаче най-сигурно е да вземем десния край. При $x_0 := 1$ имаме
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-1}{2} = \frac{3}{2}.$$
Оттам нататък методът продължава, както по-горе, т.е. в този случай наистина имаме сходимост. □

Задача 4. Направете четири итерации по метода на Нютон с начално приближение $x_0 = 1$, за да намерите приближено решение на уравнението $\sqrt[3]{x} = 0$. Какво наблюдавате?

Да обърнем внимание, че методът на Нютон е сходящ, ако началното приближение е достатъчно добро. Теоретично ние предполагаме, че решението се намира в добре избран интервал $[a, b]$, в който имаме единствено решение и в този случай избираме $x_0 \in \{a, b\}$. На практика (макар че, както казахме, в достатъчно малка околност последната теоретична постановка е почти винаги в сила) избираме началното приближение на принципа „проба-грешка", т.е. решаваме задачата за различни начални приближения, докато не достигнем сходимост. Такъв критерий за достигане на сходимост е например когато няколко последователни приближения се различават много малко, с предварително избрана точност от нас (например 10^{-3} и т.н.). Причината е, че често на практика изследването на f' и f'' е не по-лесна задача от решаването на самото уравнение.

14.3.3 Метод на секущите

За намиране на следващо приближение по метода на Нютон трябва да пресметнем стойността на функцията и производната ѝ в предишното приближение. Ако последните са достатъчно сложни, пресмятането им би било доста скъпа операция от изчислителна гледна точка. Следователно бихме искали да намерим метод, който е сходящ и е почти толкова бърз, колкото метода на Нютон, но не използва производната на f. На практика, така нареченият метод на **секущите**, се получава, като се приближи производната в (14.2) с диференчното частно

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

т.е. редицата от приближения се строи по формулата:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}). \tag{14.3}$$

Интересно

Макар формално тази формула да е еквивалентна на

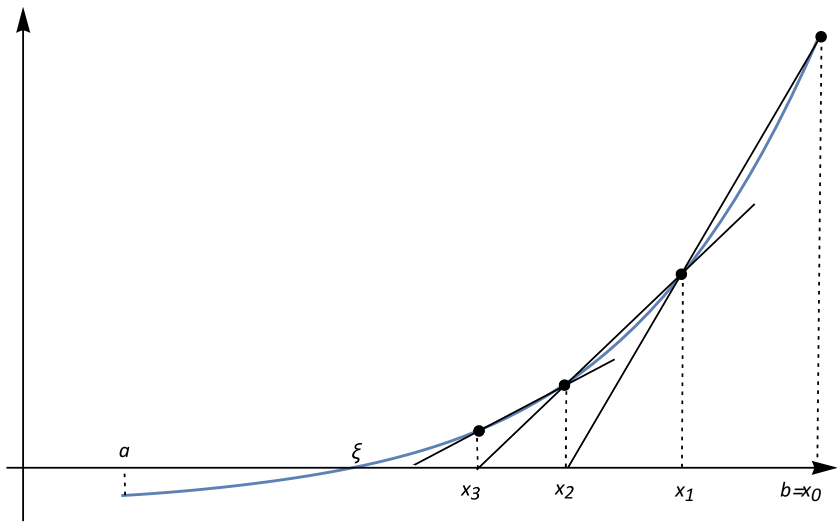
$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

последната не се използва на практика. Причината е, че тя често води до голяма загуба на точност при работа с компютър. Важно е да се има предвид, че при пресмятания с компютър има значение редът на операциите.

В последната формула се вижда, че методът на секущите изисква две начални приближения x_0, x_1. Ако $f(a)f''(a) < 0$ (или $f(b)f''(b) < 0$) последните ще избираме по следния начин:

$$\begin{aligned} x_0 : &\quad f(x_0)f''(x_0) > 0, \\ x_1 : &\quad f(x_1)f''(x_1) > 0. \end{aligned}$$

Разбира се, естествено е отново да изберем $x_0 = b$, а x_1 така, че да удовлетворява горното условие. Геометрично при метода на секущите на всяка итерация строим секуща през точките $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ и $(x_n, f(x_n))$. Следващото приближение от редицата се получава, като се вземе пресечната точка на тази секуща с Ox :



Оценка на грешката

За метода на секущите са в сила следните оценки на грешката:

$$(\text{а})\ |x_n-\xi| \le \frac{M_2}{2m_1}|(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n-2})|, \quad (\text{б})\ |x_n-\xi| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1},$$

където $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Задача 5. Като се използва методът на секущите с начални приближения $x_0 = 1$, $x_1 = 1.2$, да се намери приближено решение на уравнението

$$x^2 - 2 = 0.$$

За стоп критерий да се използва условието $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$, където $\epsilon = 10^{-2}$.

Решение. Построяваме редица от приближения по формула (14.3). Имаме:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)}(x_1-x_0) = 1.2 - \frac{-\,14/25}{-14/25-(-1)}0.2 = \frac{16}{11} \approx 1.45455;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2)-f(x_1)}(x_2-x_1) = \frac{16}{11} - \frac{14/121}{14/121-(-14/25)}\left(\frac{14}{55}\right) = \frac{103}{73} \approx 1.41096;$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f(x_3)-f(x_2)}(x_3-x_2) = \frac{3254}{2301} \approx 1.41417.$$

Получихме, че $|x_4 - x_3| \approx 0.00357 < \epsilon$. Търсеното приближение е $\frac{3254}{2301}$. □

Обикновено, когато се използват итерационни методи, за стоп критерий на алгоритъма се задава комбинация от следните:

- достигане на някаква точност, определена от дадени апостериорни/априорни оценки;
- достигане на някаква точност ϵ, която се оценява като разликата между две съседни приближения, т.е. $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$;
- задаване на максимален брой итерации.

Допълнителни задачи

Задача 6. Направете две итерации по метода на бисекцията, за да намерите приближено някое от решенията на уравнението $4x^3 - 8x + 1 = 0$.

Задача 7. За подходящо начално приближение, направете две итерации по метода на хордите, за да намерите приближено решението на уравнението

$$x^3 - x - 2 = 0.$$

Запишете приближението като десетична дроб до втори знак след десетичната запетая.

Задача 8. Направете три итерации по метода на Нютон за подходящо уравнение, за да намерите приближение на $\sqrt{3}$. Сравнете полученото от вас приближение с приближението, което получавате като използвате калкулатор.

Задача 9. По метода на свиващите изображения, намерете приближението x_1 на положителния корен на уравнението $x^3 - 2x - 5 = 0$. Като се използва оценката на грешката, да се определи за кое n се достига точност 0.01 ($|x_n - \xi| \leq 0.01$).
Упътване: В този случай е удобно уравнението да се сведе до $x = \sqrt[3]{2x+5}$. *За достатъчното условие за свиващо изображение използвайте, че* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{81}} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{64}}$.

Задача 10. Намерете с грешка, по-малка от 0.01, положителния корен на уравнението $x^3 - 2x - 5 = 0$ по метода на:

- хордите;
- Нютон.

Упътване: За да определите точността, използвайте общата им оценка: $|x_n - \xi| \leq \dfrac{|f(x_n)|}{m_1}$, където $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Задача 11. Като използвате метода на свиващите изображения, пресметнете приближението x_2 за уравнението $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ за интервала $[-3, -2]$. Използвайте оценката на грешката, за да определите за кое n се достига точност 10^{-2}.
Упътване: Изразете x^3 и разделете двете страни на x^2, за да бъде изображението $\varphi(x)$ свиващо.

Задача 12. Като използвате подходящо начално приближение, намерете с грешка, по-малка от 10^{-2}, положителния корен на уравнението $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ по метода на:

(а) хордите;

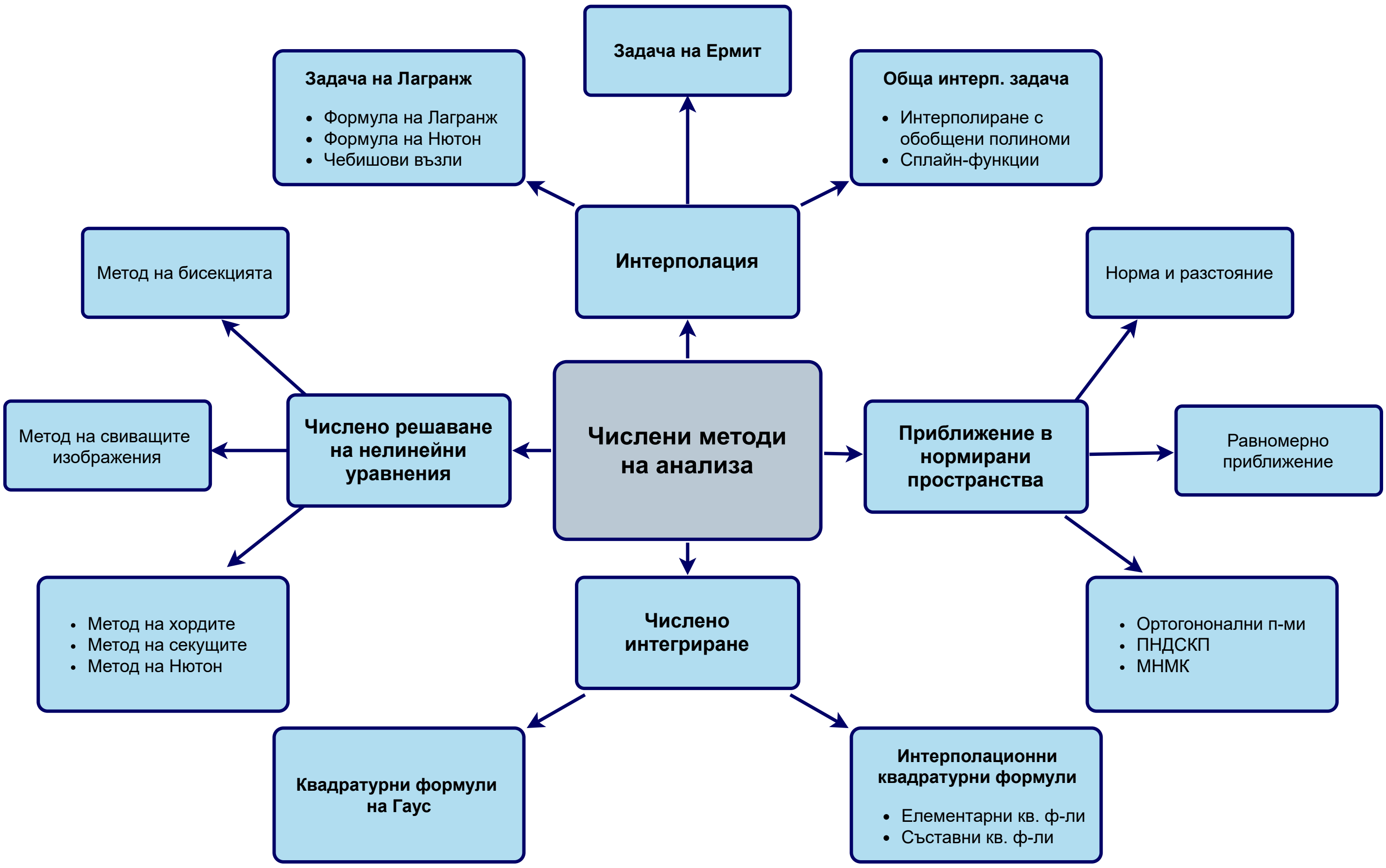
(б) Нютон.

Задача 13. Като използвате подходящо начално приближение, намерете с грешка, по-малка от 10^{-2}, корена на уравнението $x^3 - 20x + 1 = 0$ в $[0, 1]$ по метода на:

(а) свиващите изображения;

(б) хордите;

(в) Нютон.


Числени методи на анализа
Интерполация
Задача на Лагранж
Формула на Лагранж
Формула на Нютон
Чебишови възли
Задача на Ермит
Обща интерп. задача
Интерполиране с обобщени полиноми
Сплайн-функции
Числено решаване на нелинейни уравнения
Метод на бисекцията
Метод на свиващите изображения
Метод на хордите
Метод на секущите
Метод на Нютон
Приближение в нормирани пространства
Норма и разстояние
Равномерно приближение
Ортогононални п-ми
ПНДСКП
МНМК
Числено интегриране
Квадратурни формули на Гаус
Интерполационни квадратурни формули
Елементарни кв. ф-ли
Съставни кв. ф-ли

Библиография

[1] Боянов, Б.: Лекции по числени методи. Дарба, 2008.

[2] Сборник от задачи по числени методи, Университетско издателство „Св.Климент Охридски", 1994. https://intranet.fmi.uni-sofia.bg/index.php/s/h13DRI5ShkZhuQ2

[3] Сендов, Бл., Попов, В.: Числени методи. Първа част. Университетско издателство „Св.Климент Охридски", 1996.

[4] Kiusalaas, J.: Numerical Methods in Engineering. Cambridge University Press, 2010.

[5] Chapra, S.: Applied Numerical Methods with Matlab for Engineers and Scientists. McGraw Hill, 2012.